

INKOMPRESSIBLE TURBULENTE TEMPERATUR- GRENZSCHICHTEN MIT KONSTANTER WANDTEMPERATUR

W. SZABLEWSKI

Deutsche Akademie der Wissenschaften, Berlin, D.D.R.

(Received 18 March 1971)

Zusammenfassung—A. Im Rahmen von Dimensionsanalysis wird auf phänomenologischer Grundlage eine formal einfache Hypothese für den turbulenten Impulstransport aufgestellt. Das dann zur Anwendung kommende Berechnungsverfahren—im Prinzip ein Iterationsverfahren—besteht in der Ermittlung von Korrekturen zu den bereits eine Approximation liefernden Wandgesetzen. Für Äquilibrium-Grenzschichten reduziert sich dabei der Rechengang auf Quadrate und führt zu einfachen geschlossenen Lösungen. Beschrieben werden die turbulente Grenzschicht an der ebenen Platte und das Stratfordsche Modell einer turbulenten Grenzschicht mit der Wandschubspannung Null. Mit experimentellen Ergebnissen besteht Übereinstimmung.

B. Bei der turbulenten Temperaturgrenzschicht wird Ausgang genommen von der experimentellen Feststellung, dass in der Strömungsgrenzschicht sich an die Schicht inhomogener anisotroper Turbulenz eine Schicht homogener isotroper Turbulenz anschliesst. Die Hypothese für den turbulenten Impulstransport wird singgemäß auf den turbulenten Wärmetransport in der anisotropen Schicht übertragen. Der turbulente Wärmetransport in der isotropen Schicht ergibt sich dann quantitativ im Anschluss an die anisotrope Schicht. Der theoretische Verlauf des turbulenten Wärmeaustauschs bzw. der turbulenten Prandtlzahl steht in befriedigender Übereinstimmung mit Messungen in einer ausgebildeten Rohrströmung bzw. an der ebenen Platte. Das zur Anwendung kommende Berechnungsverfahren besteht wiederum in der Ermittlung von Korrekturen zu den approximierenden Wandgesetzen der Temperaturverteilung; das in diesem Zusammenhang formulierte Wandgesetz bei Druckanstieg wird durch Messungen bestätigt. In geschlossener Form werden die Temperaturgrenzschicht an der ebenen Platte und die Temperaturgrenzschicht bei der Wandschubspannung Null beschrieben. Im letzteren Fall ergibt sich eine Abhängigkeit der Stantonischen Zahl von der Reynoldsschen Zahl in der Potenz $-\frac{1}{3}$.

Die vorliegende Theorie enthält lediglich vier als universell angesehene Konstanten: die beiden Koeffizienten in der Formel für den turbulenten Austausch des Impulses in der Unterschicht; die relative Breite der inneren, noch dem Einfluss der Wand unterliegenden, Schicht des Geschwindigkeitsfeldes und für Strömungen von Luft die turbulente Prandtlzahl in der wandnahen vollturbulenten Schicht.

NOMENKLATUR

- a , universelle Konstante des turbulenten Austauschs in der Unterschicht
= 25,13 (A 9);
 A_{is} , turbulenter Austausch der Wärme in der isotropen Schicht ohne Inter-
mittenz (B 10);
 A_v , turbulenter Austausch des Impulses
(A 4);

- A_q , turbulenter Austausch der Wärme
(B 4);
 c_1 = $\tau_0/\rho u_1^2$;
 c_f , lokale Widerstandsziffer = $2c_1$;
 c_p , spezifische Wärme bei konstantem Druck;
 C , universelle Konstante des logarithm. Wandgesetzes der Geschwindigkeit
= 5,10 (A 8);

C_* ,	Konstante des Wandgesetzes der Geschwindigkeit bei Druckanstieg (A 11); $= (\sqrt{G})C$;	H ,	$= \frac{2}{\chi^2} \frac{1}{E_0} \frac{St}{\sqrt{A}}$ (B 70);
C_{**} ,	Druckziffer $= [(p - p_0)/(\rho/2)u_0^2]$;	$K(\eta)$,	Korrekturglied zum logarithm. Wandgesetz (A 25);
C_p ,		m ,	empirischer Koeffizient $= 0,6$ (A 3);
D ,	Konstante des logarithm. Wandgesetzes der Temperatur für $Pr = 0,72$ (B 14);	M ,	$= - \frac{\zeta}{\chi^2} \frac{St}{E_0}$, (B 38);
D_* ,	Konstante des Wandgesetzes der Temperatur bei Druckanstieg für $Pr = 0,72$ (B 23); $= D_*/\sqrt{G}$ (B 24); $= (Pr_i)_0^{-1}$;	N ,	(A 18); (A 32); (B 34);
E_0 ,		p ,	statischer Druck;
E_{**} ,	Konstante des Wandgesetzes der Temperatur bei der Wandschubspannung Null (B 28);	Pr ,	Prandtlsche Zahl $= c_p \mu / \lambda$;
f	hypothetische Funktion $= \exp(-\eta/m)$ (A 3);	Pr_v ,	turbulente Prandtlzahl $= A_v/A_q$;
f_T	hypothetische Funktion $= \exp\left(-\frac{\eta}{m} \frac{1}{A}\right)$ (B 3);	$(Pr_i)_0$,	turbulente Prandtlzahl in der wandnahen vollturbulenten Schicht;
f_*	$f_* = \begin{cases} 1 - \exp\left(-\frac{1}{a} \frac{v_* y}{v}\right) & \text{hypothetische Funktion (A 9);} \\ 1 - \exp\left[-\frac{1}{a} \frac{v_* y}{v} \sqrt{\left(1 + F \frac{v_* y}{v}\right)}\right] & \text{hypothetische Funktion (A12);} \end{cases}$	q ,	Wärmestromdichte;
f_{*T}	$f_{*T} = \begin{cases} 1 - \exp\left(-\frac{1}{\sqrt{E_0}} \frac{1}{a} \frac{v_* y}{v}\right) & \text{hypothetische Funktion (B 18);} \\ 1 - \exp\left[-\frac{1}{\sqrt{E_0}} \frac{1}{a} \frac{v_* y}{v} \times \sqrt{\left(1 + F \frac{v_* y}{v}\right)}\right] & \text{hypothetische Funktion (B 26);} \end{cases}$	q_0 ,	Wärmestromdichte an der Wand;
F ,	Formparameter $= \frac{v}{v_*} \frac{dp/dx}{\rho v_*^2}$ (A 11);	Re_x ,	$= u_0 x / v$;
$g(\xi)$,	Bestandteil des logarithm. Wandgesetzes (A 20);	Re_δ ,	$= u_1 \delta / v$;
G ,	$= F^{-\frac{1}{2}}$ (A 14);	St ,	Stantonsche Zahl
$G_1(\eta)$,	(B 53) bzw. (B 81);		$= \frac{q_0}{\rho c_p (T_0 - T_1)} \frac{1}{u_1(x)}$;
$G_2(\eta)$,	(B 57) bzw. (B 85);	T ,	absolute Temperatur;
		T_0 ,	Wandtemperatur;
		T_1 ,	Temperatur der äusseren Strömung;
		T_* ,	$= (T_0 - T) c_p \frac{\rho v_*}{q_0}$ (B 13);
		T_{**} ,	$= T_*/\sqrt{G}$ (B 24);
		u, v ,	Geschwindigkeitskomponenten;
		u_0 ,	Anströmgeschwindigkeit;
		$u_1(x)$,	Geschwindigkeit der äusseren Potentialströmung;
		U ,	$= \frac{u_1(x)}{u_0} [d(u_1/u_0)/dRe_x]^{-1}$ (A 31);
		v_* ,	Schubspannungsgeschwindigkeit $= \sqrt{(\tau_0 / \rho)}$;
		W ,	Ähnlichkeitsparameter (A 24);
		x, y ,	Koordinaten;
		Z ,	(A 15); (A 31); (B 31);
		β ,	Ähnlichkeitsparameter $= \frac{\delta_1}{\tau_0} \frac{dp}{dx}$;
		δ ,	Dicke der Strömungsgrenzschicht;
		δ_T ,	Dicke der Temperaturgrenzschicht;
		δ_1 ,	Verdrängungsdicke;

Δ ,	$= \delta_T/\delta$;
η ,	$= y/\delta$;
η_0 ,	relative Dicke der anisotropen Schicht des Geschwindigkeitsfeldes (B 55) bzw. (B 82);
η_* ,	$= \frac{v_* y}{v} F^{\frac{1}{3}}$ (A 14);
χ ,	universelle Konstante der Wandgesetze = 0,41;
χ_T ,	empirischer Koeffizient (B 1);
λ ,	Wärmeleitfähigkeit;
A ,	$= \frac{1}{\chi^2} \frac{(dp/dx) \delta}{\rho u_1^2}$ (A 31);
A_0 ,	(A 35);
μ ,	Zähigkeit;
v ,	kinematische Zähigkeit = μ/ρ ;
ζ ,	$= \chi/\sqrt{c_1}$;
ρ ,	Dichte;
τ ,	Schubspannung;
τ_0 ,	Wandschubspannung;
χ ,	$= (T - T_1)/(T_0 - T_1)$;
χ_0 ,	Wandgesetze der Temperatur (B 38) bzw. (B 70);
ω ,	$= u/u_1(x)$;
ω_0 ,	Wandgesetze der Geschwindigkeit; (A 20), (A 34);
ω_* ,	$= (u/v_*) F^{-\frac{1}{3}}$ (A 14).

die Aufgabe sich darauf reduzieren lässt, eine Korrektur zu den Wandgesetzen zu berechnen. Mathematisch wird dergestalt das Problem auf die Lösung gewöhnlicher Differentialgleichungen vereinfacht. Für sog. Äquilibrium-Grenzschichten, die ein fast ähnliches Verhalten aufweisen und durch Konstanz eines Parameters gekennzeichnet sind, erfordert die Rechnung dabei nur Quadraturen. Bisher durchgeführte Rechnungen für Äquilibrium-Grenzschichten vom Clauserschen Typ und für das Stratfordsche Modell einer Grenzschicht mit der Wandschubspannung Null ergaben einfache explizite Formeln in Übereinstimmung mit dem Experiment.

Hinsichtlich des turbulenten Wärmetransports in einer Grenzschicht, der den Gegenstand dieser Arbeit bildet, ist von grundsätzlicher Bedeutung die Feststellung, dass—wie die Messungen von P. S. Klebanoff [4] erweisen, Abb. 1—bei einer turbulenten Strömungsgrenzschicht an die Schicht inhomogener anisotroper Turbulenz eine Schicht vom Charakter homogener isotroper Turbulenz anschliesst (die scheinbare Inhomogenität dieser Schicht ist als durch die Intermittenz bedingt anzusehen). Diese Feststellung ist hier insofern von Bedeutung, als in dieser Schicht bei grösserer Dicke der Temperaturgrenzschicht als der Strömungsgrenzschicht der Transport von Wärme erfolgt.

Von diesem Sachverhalt ausgehend wird zunächst für die inhomogene anisotrope Schicht die Hypothese über den turbulenten Impulstransport sinngemäss auf den turbulenten Wärmetransport übertragen; durch *Anschluss* an diese Schicht ergibt sich dann der Wärmetransport in der homogenen isotropen Schicht. Der Rechengang macht dann wieder—analog dem Vorgehen bei der Strömungsgrenzschicht—Gebrauch von der Approximation der Temperaturprofile durch die Wandgesetze der Temperaturverteilung.

In der vorliegenden Arbeit wird der Formalismus für Temperaturgrenzschichten mit konstanter Wandtemperatur entwickelt. Als

EINLEITUNG

Die vorliegende Arbeit enthält eine Erweiterung der vom Verf. [1–3] entwickelten Konzeption für die Berechnung inkompressibler turbulenten Strömungsgrenzschichten auf inkompressible turbulente Temperatur-Grenzschichten.

Die Basis der genannten Konzeption bildet eine im Rahmen der Dimensionsanalyse auf phänomenologischer Grundlage gebildete formal einfache Hypothese über den turbulenten Impulstransport. Das dann zur Anwendung kommende Berechnungsverfahren macht entscheidenden Gebrauch von der Feststellung, dass bereits die Wandgesetze eine Approximation der Geschwindigkeitsprofile liefern, so dass

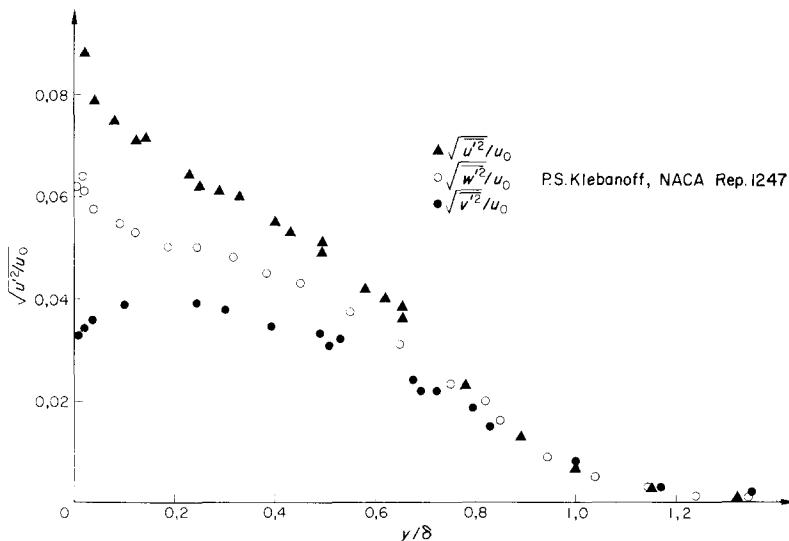


ABB. 1. Mittlere Werte der Schwankungen der Geschwindigkeitskomponenten in der turbulenten Grenzschicht an der ebenen Platte.

Beispiele werden explizit die Temperaturgrenzschicht an der ebenen Platte sowie die Temperaturgrenzschicht bei der Wandschubspannung Null beschrieben; mit vorliegenden Messungen ergibt sich befriedigende Übereinstimmung.

An empirischen Elementen enthält die hier formulierte Theorie lediglich vier als universell angesehene Konstanten: die beiden Koeffizienten in der Formel für den turbulenten Austausch des Impulses in der Unterschicht; die relative Breite der inneren, noch dem Einfluss der Wand unterliegenden, Schicht des Geschwindigkeitsfeldes; und für Strömungen von Luft die turbulente Prandtlzahl in der wandnahen vollturbulenten Schicht.

A. INKOMPRESSIBLE TURBULENTE STRÖMUNGSGRENZSCHICHTEN

Wir stellen zunächst als Grundlage für die nachfolgende Berechnung der Temperaturgrenzschicht das Berechnungsverfahren für die turbulente Strömungsgrenzschicht dar. Dabei

können wir uns hier—in Rücksicht auf die in [1–3] gegebene ausführliche Darstellung—auf die wesentlichen Punkte konzentrieren.

Es bezeichnen im folgenden x, y Koordinaten längs und senkrecht zur Wand; u, v die entspr. Geschwindigkeitskomponenten; p den statischen Druck, ρ die Dichte, ν die kinematische Zähigkeit; τ die Schubspannung, τ_0 die Wandschubspannung und δ die Grenzschichtdicke.

(I) Hypothese über den turbulenten Impulstransport

Dimensionsanalytisch erhält man für die Geschwindigkeitsverteilung in der *vollturbulenten* Schicht der Grenzschichtströmung mit

$$\tau = \tau_0 + \frac{dp}{dx} y + \text{Trägheitsglieder}$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{1}{\nu} \frac{\sqrt{(\tau/\rho)}}{y f(y/\delta)} \quad (1)$$

(ν empirischer Koeffizient), wo $f(y/\delta)$ eine bei der Dimensionsanalyse

unbestimmt bleibende Funktion ist. Aus (1) folgt für die turbulente Schubspannung

$$\frac{\tau}{\rho} = \kappa^2 y^2 f^2 \left(\frac{y}{\delta} \right) \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2, \quad (2)$$

also der Prandtlsche Mischungswegansatz.

Dabei unterstellen wir, dass für grosse Reynoldssche Zahlen $Re_x = u_0 x / \nu$ (u_0 Anströmungsgeschwindigkeit) δ/x nur schwach veränderlich ist und eine Abhängigkeit f von δ/x ausser acht bleiben kann. Die Funktion $f(y/\delta)$ hängt—so betrachtet—nur von der Geometrie des Modells ab und ist daher für Grenzschichten vom Charakter der Strömung an einer ebenen Wand als *universelle* Funktion anzusehen.

Den turbulenten Austausch A_t , definiert durch

$$\frac{\tau}{\rho} = A_t \frac{\partial u}{\partial y},$$

setzen wir demnach

$$A_t = \kappa^2 y^2 e^{-2\eta/m} \frac{\partial u}{\partial y}. \quad (4)$$

Für die Grenzschicht an der ebenen Platte ergibt sich damit (Abschn. IIIa) die Formel

$$\left. \begin{aligned} \frac{A_t}{v_* \delta} &= \kappa \eta \sqrt{(1 - \eta)} e^{-\eta/m} \\ (v_* &= \sqrt{(\tau_0 / \rho)} \text{ sog. Schubspannungs-} \\ &\text{geschwindigkeit}) \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

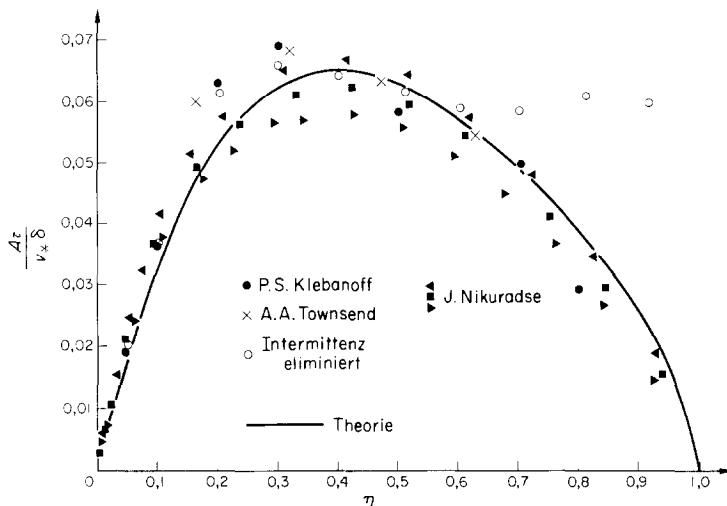


ABB. 2. Turbulenter Austausch an der ebenen Platte.

Die auf der phänomenologischen Grundlage von Messungen der turbulenten Grenzschicht an der ebenen Platte formulierte Hypothese* lautet

$$f(\eta) = e^{-\eta/m} \quad \left(\eta = \frac{y}{\delta} \right) \quad \text{für } 0 \leq \eta \leq 1 \quad (3)$$

mit dem empirischen Koeffizienten $m \approx 0,6$. Siehe hierzu auch Anhang

die, wie die von I. O. Hinze [6] vorgenommene Analyse von Messungen (Abb. 2) zeigt, gut mit dem Experiment übereinstimmt.

Der Koeffizient m kann physikalisch interpretiert werden. Vom Gesichtspunkt einer “inneren”, noch dem Einfluss der Wand unterliegenden, Schicht und einer “äußeren” Schicht vom Charakter freier Turbulenz mit konstantem Austausch, der jedoch durch Intermittenz nach aussen hin auf Null abfällt, kann m als relative Breite der inneren Schicht aufgefasst werden; vgl. Abb. 2.

* Eine Begründung der Hypothese vom Standpunkt der Turbulenzstatistik hat neuerdings Y. A. Bulyevich [5] gegeben.

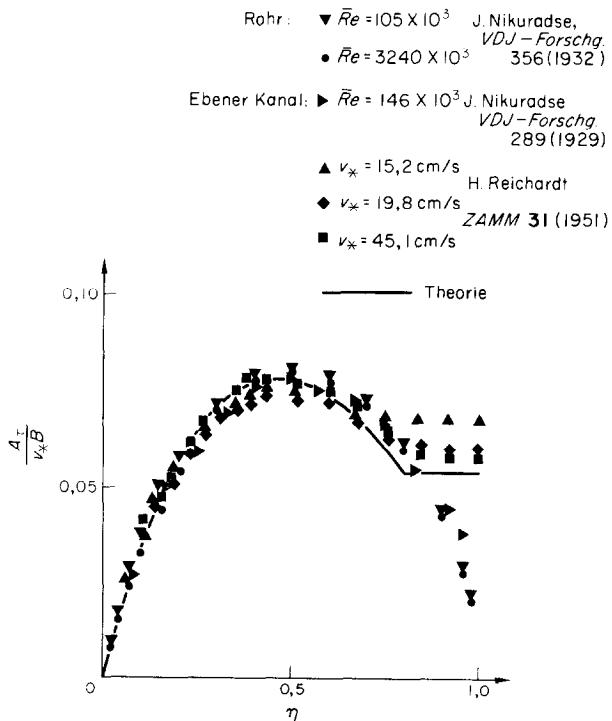


ABB. 3. Turbulenter Austausch im Rohr und ebenen Kanal.

Turbulente Parallelströmungen zwischen festen Wänden (Rohr, ebener Kanal, geradlinige Couetteströmung) weisen bei grundsätzlich gleichem Mechanismus des turbulenten Transports eine andere Struktur auf. Die relative Breite der inneren Schicht beträgt hier etwa $m \approx 0,8$; und die anschliessende äussere Schicht vom Charakter freier Turbulenz mit konstantem Austausch unterliegt hier nicht der Intermittenz. Dementsprechend gibt das [7] für das Rohr bzw. den ebenen Kanal in $\eta = [1 - (r/r_0)]$ (r Zylinderkoordinate, r_0 Rohrradius) bzw. $\eta = [y/(b/2)]$ (b Kanalbreite)

$$\frac{A_t}{v_* B} = \begin{cases} \frac{x\eta}{v_* h/2} e^{-(\eta/2)(1/m)} & \text{für } 0 \leq \eta \leq m \\ \left(\frac{A_t}{v_* B} \right)_{\eta=0.8} & \text{für } m \leq \eta \leq 1 \end{cases} \quad (6)$$

mit $B = r_0$ bzw. $b/2$.

Entspr. für die geradlinige Couetteströmung in $\eta = y/(h/2)$ (h Wandabstand)

$$\frac{A_t}{v_* h/2} = \begin{cases} \frac{x\eta}{v_* h/2} e^{-(\eta/2)(1/m)} & \text{für } 0 \leq \eta \leq m \\ \left(\frac{A_t}{v_* h/2} \right)_{\eta=0.8} & \text{für } m \leq \eta \leq 1 \end{cases} \quad (7)$$

[Für $f(\eta)$ ist hier $e^{-(\eta/2)(1/m)}$ zu setzen, da die Breite der Strömung von der ruhenden Wand bis zum Maximum der Geschwindigkeit h beträgt.]

Einen Vergleich mit Messungen enthalten die Abb. 3 und 4.

(II) Wandgesetze der Geschwindigkeitsverteilung

Wie in der Einleitung bemerkt, werden wir bei der Berechnung der Grenzschicht Gebrauch von den Wandgesetzen machen.

Die Wandgesetze, deren funktionale Form

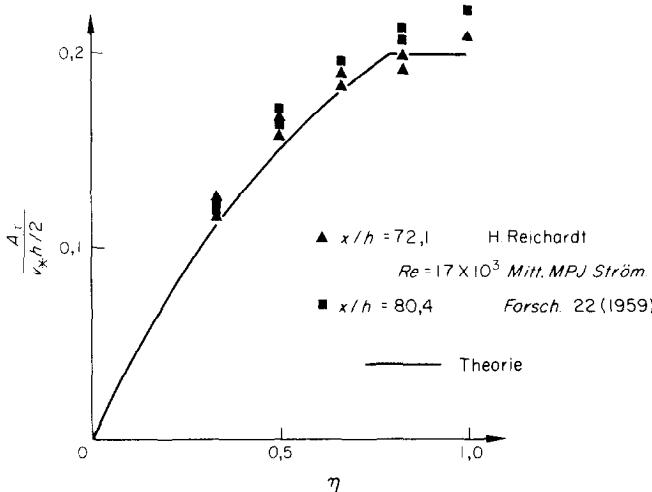


ABB. 4. Turbulenter Austausch in der geradlinigen Couette-Strömung.

als hypothesenfrei anzusehen ist, beschreiben die Geschwindigkeitsverteilung in der *wandnahen vollturbulenten* Schicht. Voraussetzung für die Existenz der Wandgesetze ist eine *relativ dünne Unterschicht*, definiert durch gleiche Größenordnung des molekularen und turbulenten Impulstransports.

(a) *Wandgesetz bei $\tau \approx \tau_0$* . In diesem Fall, den wir i. allg. bei Druckabfall und mässigem Druckanstieg antreffen, folgt aus (2) mit $f \approx 1$ das universelle log. Gesetz

$$\left. \begin{aligned} \frac{u}{v_*} &= \frac{1}{\kappa} \ln \frac{v_* y}{v} + C \\ \text{mit den hier als universell angesehenen} \\ \text{empirischen Koeffizienten} \\ \kappa &= 0,41; \quad C = 5,10. \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

Dass das logarithmische Gesetz unter den genannten Voraussetzungen die Geschwindigkeitsprofile über der gesamten Grenzschichtbreite approximiert, setzen wir als bekannt voraus.

Dem turbulenten Austausch in der Unterschicht legen wir im folgenden die Hypothese von van Driest [8] zugrunde

$$\left. \begin{aligned} A_t &= \kappa^2 y^2 f_*^2 \left(\frac{v_* y}{v} \right) \frac{\partial u}{\partial y} \\ \text{mit} \quad f_* \left(\frac{v_* y}{v} \right) &= 1 - \exp \left(- \frac{1}{a} \frac{v_* y}{v} \right); \\ a \text{ universelle Konstante} &\approx 25,13. \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

Hypothese (9) stellt das Analogon zur Hypothese (3) dar; siehe hierzu Anhang.

Unter Berücksichtigung des in der Unterschicht nicht zu vernachlässigenden molekularen Transports erhält man dann für die Geschwindigkeitsverteilung in der Unterschicht

$$\left. \begin{aligned} \frac{u}{v_*} &= \int_0^{v_* y/v} \frac{2}{1 + \sqrt{1 + 4\kappa^2 (v_* y/v)^2 f_*^2 (v_* y/v)}} \\ &\quad \times d \left(\frac{v_* y}{v} \right), \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

die mit experimentellen Ergebnissen gut übereinstimmt und für $v_* y/v \rightarrow \infty$ in das logarithmische Gesetz (8) übergeht.

(b) *Wandgesetz bei $\tau \approx \tau_0 + (dp/dx)y$* . Bei stärkerem Druckanstieg und relativ kleiner Wandschubspannung ist der Einfluss des Druck-

gradienten in der wandnahen Schicht nicht mehr zu vernachlässigen.

In diesem Fall erhält man aus (2) mit $f \approx 1$ [9, 10] das Wandgesetz

$$\left. \begin{aligned} \frac{u}{v_*} &= \frac{2}{\kappa} \left[\sqrt{\left(1 + F \frac{v_* y}{v} \right)} - 1 \right] \\ &\quad + \frac{1}{\kappa} \ln \sqrt{\left(1 + F \frac{v_* y}{v} \right)} + C_* \end{aligned} \right\} (11)$$

mit dem Formparameter

$$F = \frac{v}{v_*} \frac{dp/dx}{\rho v_*^2}.$$

Solange der Druckgradient noch nicht wesentlich in das Kräftegleichgewicht der Unterschicht eingreift, wird man hier die Koeffizienten κ , C_* denen des logarithmischen Gesetzes gleich setzen können.

Beim Eingriff des Druckgradienten in die Unterschicht erfordert die Bestimmung von C_* jedoch eine Hypothese über den turbulenten Austausch in der Unterschicht. In Verallgemeinerung von (9) setzen wir mit

$$\left. \begin{aligned} \tau &= \tau_0 + \frac{dp}{dx} y \\ A_\tau &= \kappa^2 y^2 f_*^2 \left(\frac{\sqrt{(\tau/\rho)} y}{v} \right) \frac{\partial u}{\partial y} \equiv \kappa^2 y^2 \\ &\quad \times \left\{ 1 - \exp \left[- \frac{1}{a} \frac{v_* y}{v} \sqrt{\left(1 + F \frac{v_* y}{v} \right)} \right] \right\}^2 \frac{\partial u}{\partial y}. \end{aligned} \right\} (12)$$

Man erhält damit die Geschwindigkeitsverteilung

$$\frac{u}{v_*} = 2 \int_0^{\frac{v_* y}{v}} \frac{1 + F \frac{v_* y}{v}}{1 + \sqrt{\left[1 + 4\kappa^2 \left(\frac{v_* y}{v} \right)^2 \left(1 + F \frac{v_* y}{v} \right) f_*^2 \left(\frac{\sqrt{(\tau/\rho)} y}{v} \right) \right]}} d \left(\frac{v_* y}{v} \right), \quad (13)$$

die für $v_* y/v \rightarrow \infty$ in das Wandgesetz (11) übergeht. Einige nach (13) berechnete Funktionen enthält Abb. 5.

Tabelle 1. Werte in Klammern nach G. L. Mellor [11]

F	C_*	G	C_{**}
0	5,10	(4,90)	1,0
0,01	5,12	(4,91)	0,8
0,02	5,17	(4,94)	0,6
0,04	5,28 _s	(5,01)	0,4
0,06	5,40	(5,10)	0,2
0,08	5,51 _s	(5,19)	0,1
0,1	5,62 _s	(5,26)	0,08
0,2	6,10 _s	(5,63)	0,06
0,4	6,82 _s	(6,18)	0,04
0,6	7,37	(6,65)	0,02
0,8	7,82	(7,00)	0,01
1,0	8,20 _s	(7,34)	0

Für kleine v_* ist—vgl. G. L. Mellor [11]—folgende Form zweckmässiger:

Mit

$$\left. \begin{aligned} \eta_* &= \frac{v_* y}{v} F^{\frac{1}{3}} \left[\equiv \frac{1}{v} \left(\frac{1}{\rho} \frac{dp}{dx} v \right)^{\frac{1}{3}} y \right], \\ \omega_* &= \frac{u}{v_* F^{\frac{1}{3}}} \left[\equiv \left(\frac{1}{\rho} \frac{dp}{dx} v \right)^{-\frac{1}{3}} u \right]; \\ \omega_* &= 2 \int_0^{\eta_*} \frac{G + \eta_*}{1 + \sqrt{[1 + 4\kappa^2 \eta_*^2 (G + \eta_*) f_*^2]}} d\eta_*, \end{aligned} \right\} (14)$$

wo

$$G = F^{-\frac{2}{3}}$$

und

$$\left. \begin{aligned} f_* &= f_* \left(\frac{\sqrt{(\tau/\rho)} y}{v} \right) \\ &\equiv \left[1 - \exp \left(- \frac{1}{a} \eta_* \sqrt{(G + \eta_*)} \right) \right]. \end{aligned} \right\}$$

Für C_* bzw. $C_{**} = (\sqrt{G}) C_*$ ergeben sich dann die in der Tabelle 1 angegebenen Werte, die—wie angemerkt sei—verhältnismässig wenig von

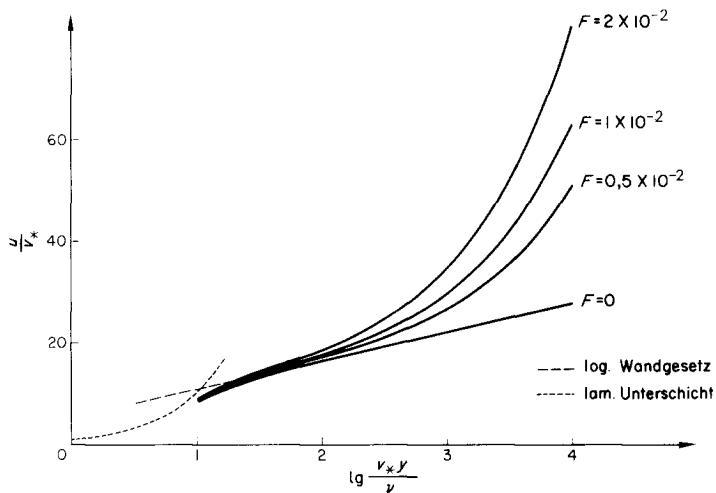


ABB. 5. Geschwindigkeitsverteilung in der Unterschicht und wandnahen vollturbulenten Schicht bei Druckanstieg.

denen abweichen, die G. L. Mellor [11] auf einem anderen Wege gefunden hat.

Das Wandgesetz (11) besitzt nun—analog dem logarithmischen Gesetz—die Eigenschaft, dass es bei Grenzschichten mit Druckanstieg

eine Approximation der Geschwindigkeitsprofile über der gesamten Grenzschichtbreite liefert. Vgl. als Beispiel Abb. 6, die—abweichend von der Darstellung in [12]—theoretische und experimentelle Verteilungen unter Zugrunde-

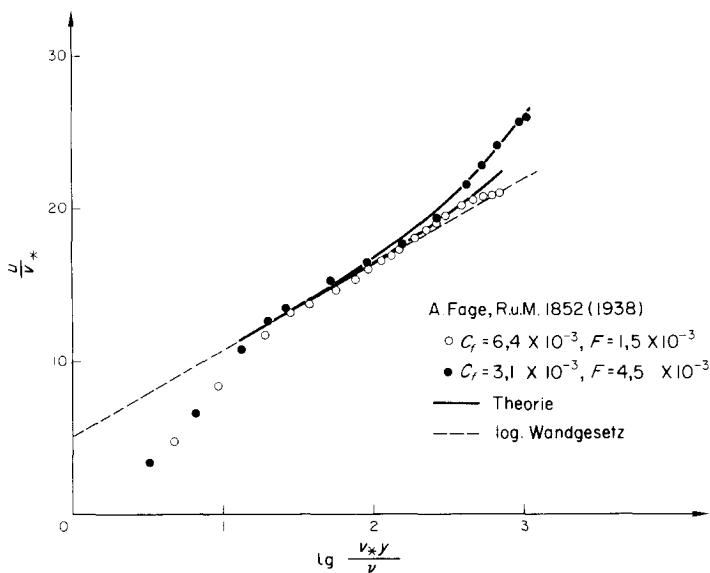


ABB. 6. Wandgesetz der Geschwindigkeitsverteilung bei Druckanstieg im Vergleich mit Messungen.

legung der experimentellen Werte von c_f und F und mit den universellen Konstanten κ , C nach (8) enthält; siehe auch [12].

(III) Berechnungsverfahren und Beispiele

(a) *Turbulente Grenzschichten mit logarithmischem Wandgesetz.* In dimensionsloser Schreibweise

$$\eta = \frac{y}{\delta(x)}, \quad \omega = \frac{u}{u_1(x)}$$

[$u_1(x)$ äussere Potentialströmung]

und mit

$$Re_x = \frac{u_0 x}{\nu} \quad (u_0 \text{ Anströmgeschwindigkeit}),$$

$$Re_\delta = \frac{u_1 \delta}{\nu} \quad \text{und} \quad c_1 = \frac{\tau_0}{\rho u_1^2}$$

erhalten wir bei Elimination von v/u_1 mittels der Kontinuitätsgleichung und durch nachfolgende Integration über η die Grenzschichtgleichung der vollturbulenten Schicht

$$\left. \begin{aligned} \frac{\tau}{\rho u_1^2} &= c_1 - \left[\frac{1}{(u_1/u_0)^2} \frac{du_1/u_0}{dRe_x} \right] Re_\delta \\ &\times \left(\eta - \int_0^\eta \omega^2 d\eta \right) \\ &+ \frac{1}{u_1/u_0} Re_\delta \frac{\partial \omega}{\partial Re_x} \int_0^\eta \omega d\eta \\ &- \frac{1}{u_1/u_0} \frac{\partial}{\partial Re_x} \\ &\left\{ Re_\delta \left(\omega \int_0^\eta d\eta - \int_0^\eta \omega^2 d\eta \right) \right\} \end{aligned} \right\} \quad (15)$$

($\equiv c_1 - Z$);

hier ist nach (2) und (3)

$$\frac{\tau}{\rho u_1^2} = \kappa^2 \eta^2 e^{-2\eta/m} \left(\frac{\partial \omega}{\partial \eta} \right)^2 \quad (16)$$

zu setzen.

Die Randbedingungen lauten

$$\left. \begin{aligned} \omega &= \frac{v}{u_1} = 0 & \text{für } \eta = 0 \\ \omega &= 1 & \text{für } \eta = 1. \end{aligned} \right\} \quad (17)$$

Für $\eta = 1$ folgt mit $\omega = 1$ und $\tau = 0$ der Impulsintegralsatz

$$\begin{aligned} c_1 &= \left[\frac{1}{(u_1/u_0)^2} \frac{du_1/u_0}{dRe_x} \right] Re_\delta \left(1 - \int_0^1 \omega^2 d\eta \right) \\ &+ \frac{1}{u_1/u_0} \frac{d}{dRe_x} \left\{ Re_\delta \int_0^1 \omega(1 - \omega) d\eta \right\} \quad (\equiv N). \end{aligned} \quad (18)$$

Mit dem Symbol

$$\xi = \frac{\kappa}{\sqrt{c_1}}$$

können wir dann nach (15), (16) und (18) auch schreiben

$$\frac{\partial \omega}{\partial \eta} = \frac{1}{\xi} \frac{\sqrt{[1 - (Z/N)]}}{\eta} e^{\eta/m}. \quad (19)$$

Vom Gesichtspunkt einer Korrektur zum approximierenden Wandgesetz—vgl. Abschn. 2—berechnen wir nun die in (19) auftretenden Trägheitsglieder mittels des logarithmischen Wandgesetzes (8)

$$\omega_0 = \frac{1}{\xi} \ln \eta + g(\xi) \quad (20)$$

mit

$$g(\xi) = \frac{1}{\xi} \left[\kappa C + \ln \left(Re_\delta \frac{\kappa}{\xi} \right) \right]$$

(Index 0 kennzeichnet hier und im folgenden das Wandgesetz). Die auftretenden unbekannten Parameter ξ und Re_δ werden im weiteren mittels der Randbedingung $\omega = 1$ für $\eta = 1$ und des Impulsintegralsatzes bestimmt.

Mit $\omega_0 = 1$ für $\eta = 1$ kommt in 1. Näherung und

$$Re_\delta = \frac{\xi}{\chi} e^{\xi - \chi c}. \quad (21)$$

Wir können dann auch setzen

$$\omega_0 = 1 + \frac{1}{\xi} \ln \eta. \quad (22)$$

Spalten wir in (19) die Singularität ab, so

$$\begin{aligned} \omega = \frac{1}{\xi} \ln \eta + g(\xi) + \\ + \frac{1}{\xi} \int_0^\eta \frac{\sqrt{[1 - (Z/N)] e^{\eta/m} - 1}}{\eta} d\eta, \end{aligned} \quad (23)$$

wo nunmehr das letzte Glied die Korrektur zum logarithmischen Gesetz angibt. Für diese Korrektur beschränken wir uns in der Rechnung auf Glieder der Größenordnung $1/\xi$ ($\xi \sim 10$). Mit (22) ergibt eine einfache Rechnung

$$\left. \begin{aligned} \frac{Z}{N} &\approx \eta - 2W\eta \ln \eta, \\ W &= \frac{1}{\chi^3} \frac{1}{e^{\chi c}} \left[\frac{1}{(u_1/u_0)^2} \frac{du_1/u_0}{dRe_x} \right] \xi^2 e^\xi; \end{aligned} \right\} \quad (24)$$

so dass also

$$\left. \begin{aligned} \omega &= \frac{1}{\xi} \ln \eta + g(\xi) + \frac{1}{\xi} K(\eta) \\ \text{mit} \quad K(\eta) &= \int_0^\eta \frac{\sqrt{(1 - \eta + 2W\eta \ln \eta) e^{\eta/m} - 1}}{\eta} d\eta. \end{aligned} \right\} \quad (25)$$

Wir merken noch an, dass man die so gewonnene Korrektur zum logarithmischen Gesetz als ersten Schritt einer Iterationsrechnung ansehen kann, die man beliebig fortsetzen kann.

ω hat der Randbedingung $\omega = 1$ für $\eta = 1$ zu genügen. Das ergibt jetzt in 2. Näherung

$$Re_\delta = \frac{\xi}{\chi} e^{\xi - \chi c - K(1)} \quad (26)$$

$$\omega = 1 + \frac{1}{\xi} \{ \ln \eta + K(\eta) - K(1) \}. \quad (27)$$

Der Parameter W steht in enger Beziehung zum Clauserschen Ähnlichkeitsparameter

$$\beta = \frac{\delta_1}{\tau_0} \frac{dp}{dx} \quad (\delta_1 \text{ Verdrängungsdicke});$$

und zwar ist

$$\beta = -\{1\} e^{-K(1)} W$$

mit

$$\{1\} = \{1 + K(1) - \int_0^1 K d\eta\}.$$

Der Verlauf von W in (25) bzw. von ξ in Abhängigkeit von Re_x ist dann aus dem Impulsintegralsatz (18) zu ermitteln, wobei die Quadraturen nunmehr mit (27) durchzuführen sind und Re_δ nach (26) einzusetzen ist.

Für Äquilibrium-Grenzschichten mit $\beta = \text{const.}$ bzw. $W = \text{const.}$ ergibt der obige Formalismus einfache explizite Formeln, die z. B. mit den von H. J. Herring, J. Norburry [13] durchgeführten Experimenten gut übereinstimmen [1].

Für die Strömungsgrenzschicht an der ebenen

Tabelle 2

η	$K(\eta)$	η	$K(\eta)$
0,02	0,024	0,56	0,695
0,04	0,047	0,60	0,743
0,06	0,071	0,66	0,814
0,08	0,095	0,70	0,858
0,10	0,119	0,76	0,920
0,16	0,192	0,80	0,957
0,20	0,241	0,86	1,003
0,26	0,316	0,90	1,026
0,30	0,367	0,92	1,034
0,36	0,443	0,94	1,039
0,40	0,494	0,96	1,041
0,46	0,570	0,98	1,039
0,50	0,620	1,00	1,026

$$\{1\} = 1,430.$$

$$A = 2,612 \quad (1. \text{ Näherung } A = 2,000).$$

Platte erhalten wir nach (25) und (27) die einfache Formel

$$\left. \begin{aligned} \omega &= 1 + \frac{1}{\xi} \{ \ln \eta + K(\eta) - K(1) \} \\ K(\eta) &= \int \frac{\sqrt{(1-\eta) e^{\eta/m} - 1}}{\eta} d\eta. \end{aligned} \right\} \quad (28)$$

mit

$$\left. \begin{aligned} Re_x &= \frac{1}{\kappa^3} \{ 1 \} e^{-(\kappa C + K(1))} \xi^2 e^\xi \\ &\times \left[1 - \frac{2+A}{\xi} + \frac{2(1+A)}{\xi^2} \right] + \text{const.} \\ \left(c_f = \frac{2\kappa^2}{\xi^2} \right), \end{aligned} \right\} \quad (29)$$

Tabelle 2 enthält die berechnete Funktion

die für $\text{const} = 0$ gut mit der von D. B. Spalding [14] ermittelten empirischen Kurve übereinstimmt. A nach Tabelle 2.

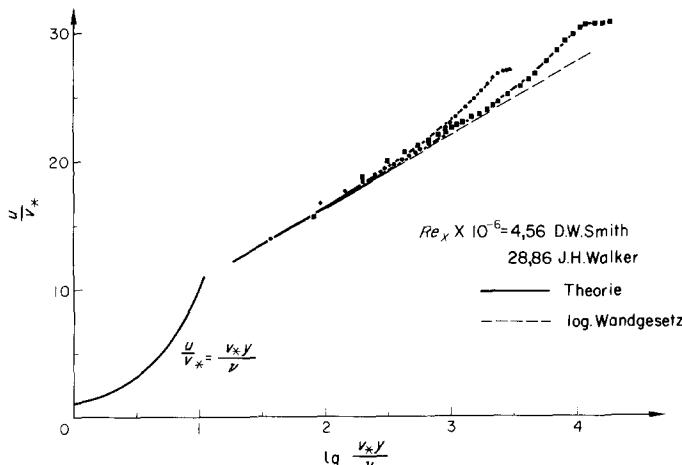


ABB. 7. Geschwindigkeitsverteilung in der turbulenten Grenzschicht an der ebenen Platte.

$K(\eta)$. Einen Vergleich mit Messungen zeigt Abb. 7.

Für den turbulenten Austausch haben wir damit die in Abb. 2 aufgetragene Verteilung

$$\frac{A_r}{v_* \delta} = \kappa \eta \sqrt{(1-\eta) e^{-\eta/m}}.$$

Aus dem Impulsintegralsatz (18) schliesslich gewinnt man die Widerstandsformel

(b) *Turbulente Grenzschichten in Ablösungs-nähe*. Die Ablösungsnähe ist dabei durch die Forderung definiert, dass in der *vollturbulenten* Schicht

$$\tau_0 \ll \frac{dp}{dx} y. \quad (30)$$

Der Bewegungsgleichung (15) geben wir mit

$$A = \frac{1}{\kappa^2} \frac{(dp/dx) \delta}{\rho u_1^2}$$

und

$$U = \frac{u_1/u_0}{d(u_1/u_0)/dRe_x}$$

die für das vorliegende Modell zweckmässigere Form

$$\left. \begin{aligned} \frac{1}{\kappa^2} \frac{\tau}{\rho u_1^2} &= \frac{1}{\xi^2} + \Lambda \eta + \frac{\partial}{\partial Re_x} \\ &\times \left\{ \Lambda U \left(\omega \int_0^\eta \omega d\eta - \int_0^\eta \omega^2 d\eta \right) \right\} \\ &- \Lambda U \frac{\partial \omega}{\partial Re_x} \int_0^\eta \omega d\eta \\ &+ \Lambda \left(\omega \int_0^\eta \omega d\eta - 2 \int_0^\eta \omega^2 d\eta \right) \\ &\left(\equiv \frac{1}{\xi^2} + \Lambda \eta - Z \right). \end{aligned} \right\} \quad (31)$$

Der Impulsintegralsatz lautet

$$\left. \begin{aligned} \frac{1}{\xi^2} + \Lambda &= - \frac{d}{dRe_x} \left\{ \Lambda U \int_0^1 \omega (1 - \omega) d\eta \right\} \\ &- \Lambda \int_0^1 \omega (1 - 2\omega) d\eta \\ &\left(\equiv N \right). \end{aligned} \right\} \quad (32)$$

Es folgt mit $1/\xi^2 \ll \Lambda \eta$ nach der oben genannten Voraussetzung

$$\frac{1}{\kappa^2} \frac{\tau}{\rho u_1^2} \approx \Lambda \left\{ \eta - \frac{Z}{N} \right\}. \quad (33)$$

Das Wandgesetz (11) nimmt hier die einfache Form

$$\left. \begin{aligned} \omega_0 &\approx 2(\sqrt{\Lambda_0})(\sqrt{\eta}) + \frac{1}{\xi} \left[-3 \ln \xi + \kappa C_* \right. \\ &\quad \left. - 2 + \ln(4\kappa^3) + \ln \left(-U \frac{u_1}{u_0} \right) \right]. \end{aligned} \right\} \quad (34)$$

an. Der Rechengang verläuft dann wie in Abschn. IIIa. Unterwerfen wir ω_0 der Randbedingung $\omega_0 = 1$ für $\eta = 1$, so kommt

$$\omega_0 = 1 + 2(\sqrt{\Lambda_0})[(\sqrt{\eta}) - 1]. \quad (35)$$

Die in (31) und (32) auftretenden Trägheitsglieder werden dann mit (35) berechnet. Das ergibt mit

$$\frac{\partial}{\partial Re_x} = \frac{\partial}{\partial \sqrt{\Lambda_0}} \frac{d\sqrt{\Lambda_0}}{dRe_x}$$

$$Z = \Lambda_0(r\eta + s\eta^{\frac{3}{2}} + t\eta^2);$$

$$r = 1 - 4(\sqrt{\Lambda_0})(1 - \sqrt{\Lambda_0})$$

$$- 2(1 - 2\sqrt{\Lambda_0}) U \frac{d\sqrt{\Lambda_0}}{dRe_x},$$

$$s = 2(\sqrt{\Lambda_0}) \left\{ (1 - 2\sqrt{\Lambda_0}) \right.$$

$$\left. \times \left(1 - \frac{1}{3} \frac{dU}{dRe_x} \right) - \frac{2}{3} U \frac{d\sqrt{\Lambda_0}}{dRe_x} \right\}, \quad (36)$$

$$t = \frac{2}{3} \Lambda_0 \left(2 - \frac{dU}{dRe_x} \right).$$

$$N = \Lambda_0 \left\{ 1 - 2(\sqrt{\Lambda_0}) + \frac{4}{3} \Lambda_0 \right.$$

$$- \frac{2}{3} (\sqrt{\Lambda_0})(1 - \sqrt{\Lambda_0}) \frac{dU}{dRe_x}$$

$$- 2(1 - \frac{4}{3} \sqrt{\Lambda_0}) U \frac{d\sqrt{\Lambda_0}}{dRe_x} \right\}.$$

Die auftretenden unbekannten Parameter Λ und ξ wären im weiteren Verlauf der Rechnung mittels der Randbedingung $\omega = 1$ für $\eta = 1$ und des Impulsintegralsatzes (32) zu bestimmen.

Für Äquilibriumgrenzschichten $\Lambda = \text{const.}$ reduziert sich die Rechnung wieder auf Quadaturen und ergibt einfache explizite Formeln. Gute Übereinstimmung ergab sich mit Clauzers Äquilibrium-Modell (pressure distribution 2) bis auf die lokalen Widerstandswerte c_f , die

bei F. H. Clauser [15] mittels des logarithmischen Wandgesetzes ermittelt wurden, was in Ablösungsnähe nicht zulässig ist; vgl. [2].

Gemäss unserem Vorhaben beschränken wir uns in der weiteren Darstellung auf das *Stratfordsche Modell* $\tau_0 \approx 0$ [16].

Aus (34) folgt zunächst

$$\omega_0 \approx 2(\sqrt{\Lambda_0})(\sqrt{\eta}) + \lim_{\xi \rightarrow \infty} \left\{ \frac{1}{\xi} \left[\kappa C_* + \ln \left(-U \frac{u_1}{u_0} \right) \right] \right\}.$$

Nehmen wir für die äussere Potentialströmung ein Potenzgesetz

$$\frac{u_1(x)}{u_0} = D_1 \left(\frac{x}{x_0} - D_2 \right)^n$$

an, so kommt nach Definition (11) von F und mit C_{**} nach Tabelle 1

$$\omega_0 \approx 2(\sqrt{\Lambda_0})(\sqrt{\eta}) + C_{**} \left(-\frac{n-1}{D_1 Re_{x_0}} \right)^{\frac{1}{n}} \left(\frac{x}{x_0} - D_2 \right)^{-(1+n)/3}. \quad (37)$$

Für grosse Re_{x_0} ($Re_{x_0} \rightarrow \infty$) erhält man aus der Randbedingung $\omega_0 = 1$ für $\eta = 1$

$$(\sqrt{\Lambda_0}) = \frac{1}{2} \quad \text{und} \quad \omega_0 = \sqrt{\eta}. \quad (38)$$

Die Rechnung mit (38) ergibt dann nach (36)

$$\frac{Z}{N} = \eta^2 \quad (39)$$

Es folgt aus (33)

$$\omega = (\sqrt{\Lambda}) \phi(\eta) \quad \left. \right\} \quad (40)$$

mit

$$\phi(\eta) = \int_0^\eta \sqrt{\left(\frac{1-\eta}{\eta} \right) e^{\eta/m}} d\eta \quad \left. \right\} \quad (40)$$

Die Randbedingung $\omega = 1$ für $\eta = 1$ erfordert

$$(\sqrt{\Lambda}) = \frac{1}{\phi(1)}, \text{ was mit } \phi(1) = 2,629$$

$$(\sqrt{\Lambda}) = 0,38 \quad (41)$$

gibt.

Gerechnete und gemessene Profile enthält Abb. 8.

Den zur Erzeugung der Grenzschichtströmung mit der Wandreibung Null erforderlichen

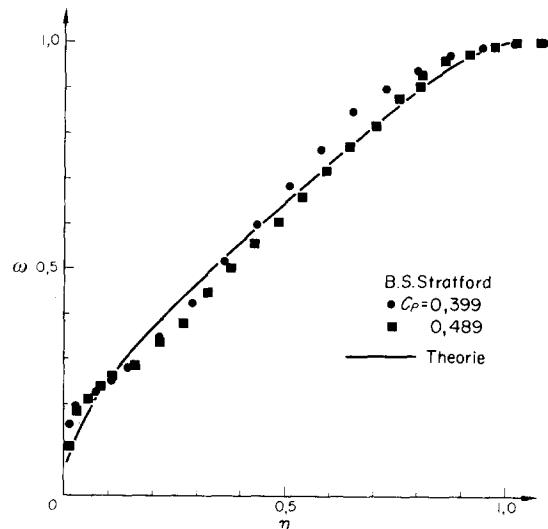


ABB. 8. Äquilibriumprofil der Geschwindigkeit bei der Wandschubspannung $\tau_0 = 0$ (Stratfords Modell).

Verlauf der Potentialströmung $u_1(x)$ entnehmen wir dem Impulsintegralsatz (32)

$$-1 = \frac{dU}{dRe_x} \int_0^1 \omega(1-\omega) d\eta + \int_0^1 \omega(1-2\omega) d\eta, \quad \left. \begin{aligned} \int_0^1 \phi d\eta &= 1,645; & \int_0^1 \phi^2 d\eta &= 3,174 \\ \frac{u_1(x)}{u_0} &= D_1 \left(\frac{x}{x_0} - D_2 \right)^{-0,235} \end{aligned} \right\} \quad (42)$$

liefert. Die Integrationskonstanten D_1 , D_2 sind durch das jeweilige Modell festgelegt. (In 1. Näherung mit (38) erhielt man den Exponenten $-0,25$.)

Die Abb. 9 zeigt den gerechneten und gemessenen Verlauf des Druckes

$$C_p \left(= \frac{p - p_0}{(\rho/2) u_0^2} \right) = 1 - D_1^2 \left(\frac{x}{x_0} - D_2 \right)^{-0.470}, \quad (43)$$

wobei nach Messung

$$D_1 \approx (\sqrt{0,37}), \quad D_2 \approx 0,84.$$

determiniert anzusehen: die Dichte ρ , die spezifische Wärme c_p bei konstantem Druck, die Wärmestromdichte q , den Wandabstand y und die Dicke δ_T der Temperaturgrenzschicht. Insofern die Transporteigenschaften wesentlich vom Charakter der Turbulenz abhängen, tritt als weitere physikalische Einflussgrösse $\partial u / \partial y$ hinzu.

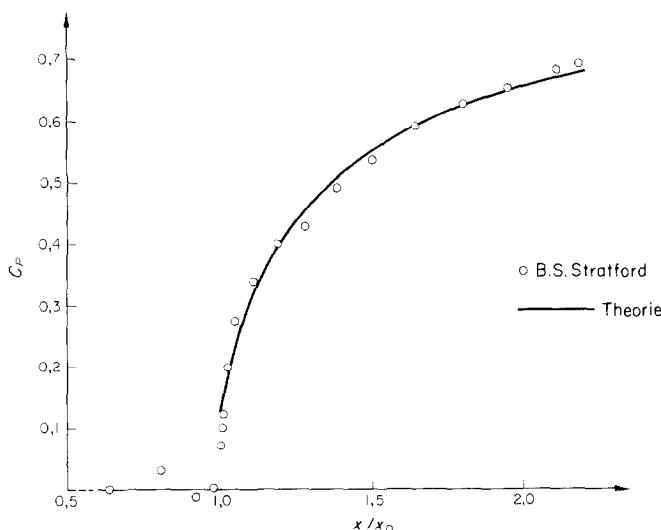


ABB. 9. Druckverlauf für Stratfords Modell.

B. INKOMPRESSIBLE TURBULENTE TEMPERATUR-GRENZSCHICHTEN

(I) Hypothese über den turbulenten Wärmetransport.

Wir unterscheiden im folgenden—vgl. Einleitung—in der Strömungsgrenzschicht eine Schicht inhomogener und anisotroper Turbulenz, gebunden an $\partial u / \partial y \neq 0$, und eine anschliessende Schicht vom Charakter homogener und isotroper Turbulenz ($\partial u / \partial y \approx 0$).

(a) *Inhomogene anisotrope Schicht.* In der *vollturbulenten* Schicht ist die Temperaturverteilung T (absolute Temperatur) zunächst als durch folgende physikalische Einflussgrössen

Dimensionsanalytisch erhält man dann mit $q = q_0 + \text{Konvektionsglieder}$

$$\left[\begin{aligned} q_0 &= -\lambda \left(\frac{\partial T}{\partial y} \right)_0 \text{ Wärmestromdichte an der} \\ &\quad \text{Wand,} \\ &\quad \lambda \quad \text{Wärmeleitfähigkeit} \end{aligned} \right] \quad \left. \begin{aligned} \frac{\partial T}{\partial y} &= -\frac{1}{\kappa_T} \frac{q}{\rho c_p} \frac{1}{\partial u / \partial y} \frac{1}{y^2} \frac{1}{f_T^2(y/\delta_T)} \\ &\quad (\kappa_T \text{ empirischer Koeffizient}), \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

wo $f_T(y/\delta_T)$ eine bei der Dimensionsanalyse unbestimmt bleibende Funktion ist. Wie bei

der Strömungsgrenzschicht lassen wir eine Abhängigkeit der Funktion f_T von δ_T/x ausser acht. Es folgt

$$\frac{q}{\rho c_p} = - \kappa_T^2 y^2 f_T^2 \left(\frac{y}{\delta_T} \right) \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial T}{\partial y}. \quad (2)$$

Die Funktion $f_T(y/\delta_T)$ ist dabei wieder für Grenzschichten vom Charakter der Strömung an einer ebenen Wand als *universelle* Funktion anzusehen.

Wir übertragen nun die Hypothese über den turbulenten Impulstransport (A 3) $f(y/\delta) = e^{-\eta/m}$ sinngemäss auf den turbulenten Wärme-transport und setzen

$$f_T \left(\frac{y}{\delta_T} \right) = e^{-(1/m) y/\delta_T} = e^{-\eta/m \Delta} \quad \left(\Delta = \frac{\delta_T}{\delta} \right) \quad (3)$$

mit $m = 0,6$ für Grenzschichten.

Für den Austausch A_q , definiert durch

$$\frac{q}{\rho c_p} = - A_q \frac{\partial T}{\partial y},$$

nehmen wir also an

$$A_q = \kappa_T^2 y^2 e^{-2(\eta/m \Delta)} \frac{\partial u}{\partial y}. \quad (4)$$

Das Verhältnis der Austauschgrössen A_q und A_τ (A 4), dessen reziproker Wert als turbulente Prandtlzahl Pr_t bezeichnet wird, ergibt sich damit—wenn wir noch das Symbol

$$E_0 = \frac{\kappa_T^2}{\kappa^2} \quad (5)$$

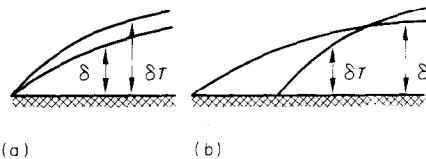
einführen—zu

$$\frac{A_q}{A_\tau} \left(\equiv \frac{1}{Pr_t} \right) = E_0 \exp \left[2 \frac{\eta}{m} \left(1 - \frac{1}{\Delta} \right) \right]. \quad (6)$$

Demnach würde also in der anisotropen vollturbulenten Schicht mit wachsendem Wandabstand Pr_t ansteigen, konstant sein oder fallen; je nachdem ob $\Delta > 1$, $= 1$, < 1 .

$1/E_0$ ist gleich $(Pr_t)_0$ in der wandnahen vollturbulenten Schicht und im Rahmen unserer

Theorie eine empirische Zahl. Der Parameter $\Delta = \delta_T/\delta$ ist als Variable anzusehen gemäss einer der beiden Konstellationen



Hinsichtlich der Hypothese (3) ist zu bemerken, dass die Temperaturgrenzschicht, auch wenn sie wie in (b) zunächst innerhalb der Strömungsgrenzschicht gelegen ist, infolge des schwankenden Charakters ihrer äusseren Grenze ein intermittierendes Verhalten zeigt; experimentell hat das D. S. Johnson [17] nachgewiesen.

Zur Prüfung des Ansatzes (4) für A_q wird hier zunächst eine Messung von R. E. Johnk [18] herangezogen, in der die Entwicklung einer Temperaturgrenzschicht innerhalb einer ausgebildeten turbulenten Rohrströmung (*Konstellation b*) untersucht wurde. Theoretisch erhält man [7] für die turbulente Rohrströmung mit (A 6)

$$\frac{du}{dy} = \frac{v_*}{\kappa} \frac{1}{y} \sqrt{(1 - \eta)} e^{\eta/0,8} \quad \text{für } 0 \leq \eta \leq 0,8.$$

Damit kommt nach (4)

$$A_q = E_0 \kappa v_* y \sqrt{(1 - \eta)} \exp \left[\frac{\eta}{0,8} \left(1 - \frac{2}{\Delta} \right) \right] \quad \text{für } 0 \leq \eta \leq 0,8. \quad (7)$$

Nach Messungen—siehe Abschn. II—beträgt für Strömungen von Luft $E_0 \approx 1/0,89$. Einsetzen der gemessenen Werte von v_* und geschätzter Wert von Δ aus einem Diagramm in [18] in Formel (7) ergibt dann die in Abb. 10 eingetragenen Verteilungen von A_q . Die angegebenen experimentellen Werte A_q wurden von Johnk aus den gemessenen Temperaturverteilungen ermittelt, wobei graphische Differentiation zur Anwendung kam. Man kann feststellen, dass unser Ansatz (7) qualitativ das

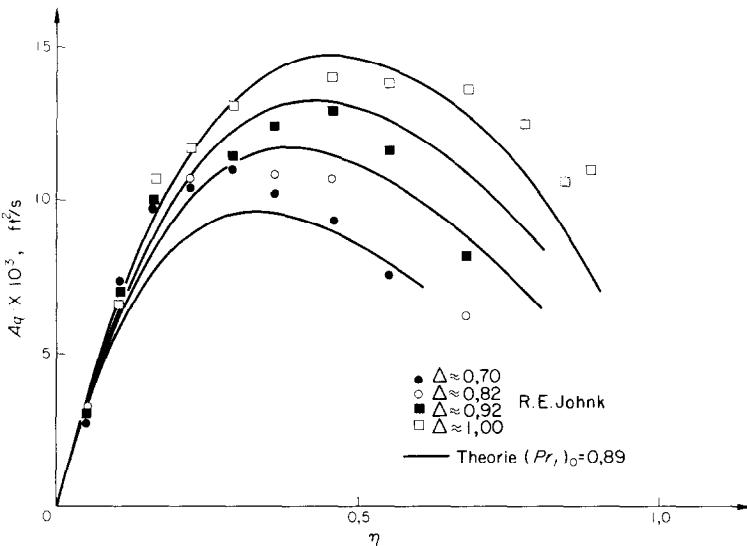


ABB. 10. Wärmeaustausch einer Temperaturgrenzschicht in einer ausgebildeten turbulenten Rohrströmung.

richtige Verhalten zeigt und in quantitativer Hinsicht in Anbetracht der genannten Unsicherheiten in bemerkenswerter Übereinstimmung mit den Messungen steht.

Für die Temperaturgrenzschicht (Konstellation a) haben wir nach (6) in der anisotropen Schicht folgenden Verlauf der turbulenten Prandtlzahl

$$Pr_t = \frac{1}{E_0} \exp \left[-2 \frac{\eta}{m} \left(1 - \frac{1}{\Delta} \right) \right]. \quad (8)$$

Beim Modell der *ebenen Platte* (Abschn. III b) ist für hinreichend grosse Lauflänge nach (49) $\Delta \approx E_0$ ($\approx 1/0,89$ für Strömungen von Luft). Die anisotrope Schicht reicht nach Theorie (55) und Experiment (Abb. 1) bis etwa $\eta_0 \approx 0,87$. Anschliessend haben wir eine Schicht isotroper Turbulenz (Abschn. I b), für die wir nach (A 5) sowie (10) und (54)

$$Pr_t = \frac{1}{E_0 \eta_0} \sqrt{\left(\frac{1 - \eta}{1 - \eta_0} \right)} \times \exp \left[\frac{1}{m} \left(1 - \frac{1}{\Delta} \right) (\eta + \eta_0) \right] \quad (9)$$

erhalten.

Mit (8) und (9) erhält man die in Abb. 11 wiedergegebene Verteilung von Pr_t . In einer kürzlich erschienenen Arbeit haben R. L. Simpson, D. G. Whitten und R. J. Moffat [19] aus Messungen an der ebenen Platte die Verteilung von Pr_t über der Grenzschichtdicke unter vereinfachenden Annahmen und bei approximativer Bestimmung der Profiltangenten ermittelt. Die erhaltenen Werte Pr_t weisen zwar eine

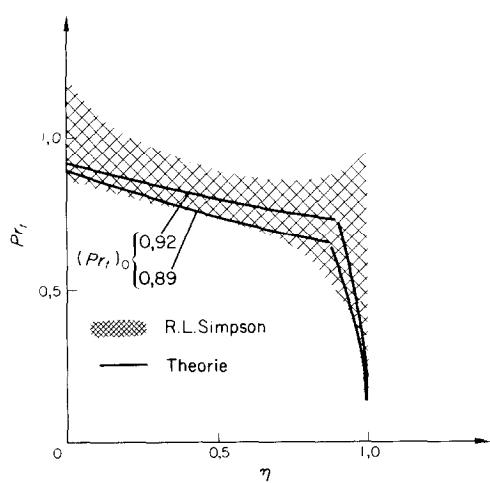


ABB. 11. Profil der turbulenten Prandtlzahl an der ebenen Platte.

starke Streuung auf, doch könnte man der Messung entnehmen, dass für Luft statt $1/E_0 = 0,89$, dem unseren Rechnungen zugrundegelegten Wert, besser $1/E_0 = 0,92$ anzunehmen wäre; vgl. Abb. 11, in die wir noch die theoretische Verteilung von Pr_t für $E_0 = 1/0,92$ mit $\eta_0 \approx 0,90$ eingetragen haben.

Soweit man also auf Grund der hier vorgenommenen Gegenüberstellung des Ansatzes (2), (3) mit Messungen urteilen kann, dürfte für Grenzschichten mit Druckabfall oder mässigem Druckanstieg der Ansatz eine tragfähige Basis bilden.

(b) *Homogene isotrope Schicht.* An die Schicht inhomogener anisotroper Turbulenz ($\partial u/\partial y \neq 0$) schliesst sich (vgl. Abb. 1) eine Schicht vom Charakter homogener isotroper Turbulenz, charakterisiert durch angenähert gleiche Beiträge des quadratischen Mittels der Schwankungen der Geschwindigkeitskomponenten

$$\overline{u^{1.2}} \approx \overline{v^{1.2}} \approx \overline{w^{1.2}}.$$

Die scheinbare Inhomogenität ist als durch die Intermittenz bedingt anzusehen. (Die an die turbulente (wirbelhafte) Schicht anschliessende turbulenzfreie, aber nicht schwankungsfreie, Schicht begreifen wir hier mit ein.) Der Wärmetransport in dieser Schicht wird aktuell, wenn die Dicke δ_T der Temperaturgrenzschicht grösser ist als die Dicke δ der Strömungsgrenzschicht.

In homogener isotroper Turbulenz ist die turbulente Wärmestromdichte $q/\rho c_p$ als durch die charakteristische Geschwindigkeit $\sqrt{v^{1.2}}$ und eine charakteristische Länge L determiniert anzusehen:

$$\frac{q}{\rho c_p} = -L(\sqrt{v^{1.2}}) \frac{\partial T}{\partial y} \quad \left(\equiv -A_{is} \frac{\partial T}{\partial y} \right).$$

Für die anisotrope Schicht hatten wir nach (2) und (3) die der Intermittenz Rechnung tragende Länge

$$l_T = \kappa_T y e^{-\eta/mA}.$$

Entsprechend setzen wir hypothetisch für die der Intermittenz unterliegende isotrope Schicht

$$\frac{q}{\rho c_p} = -A_{is} e^{-\eta/mA} \frac{\partial T}{\partial y}. \quad (10)$$

Anisotrope und isotrope Schicht sind aneinander zu schliessen, was zur Bestimmung von A_{is} führt.

Die Anschluss-Stelle selbst ergibt sich im Rahmen unserer Darstellung mittels der Forderung eines monotonen Verlaufs von $\partial T/\partial y$; vgl. hierzu Abschn. III b.

(II) Wandgesetze der Temperaturverteilung

Die Wandgesetze, deren funktionale Form als hypothesenfrei anzusehen ist, beschreiben die Temperaturverteilung in der *wandnahen vollturbulenten* Schicht. Voraussetzung für die Existenz der Wandgesetze ist eine *relative dünne Unterschicht*, definiert durch gleiche Grössenordnung des molekularen und turbulenten Impuls- und Wärmetransports.

Wie bei der Strömungsgrenzschicht werden wir bei der Berechnung der Temperaturgrenzschicht Gebrauch von der Approximation der Temperaturprofile über der gesamten Grenzschichtdicke durch die Wandgesetze machen.

(a) *Wandgesetz bei $\tau \approx \tau_0$.* Für die Geschwindigkeitsverteilung haben wir in diesem Fall das logarithmische Gesetz (A 8).

Bei vernachlässigbarer Dissipation lautet die Energiegleichung hier

$$\frac{\lambda}{\rho c_p} \left(\frac{\partial T}{\partial y} \right)_0 = A_q \frac{\partial T}{\partial y} \quad (11)$$

(der Fall der wärmeisolierten Wand $\lambda(\partial T/\partial y)_0 = 0$ bleibt—wie in der Einleitung gesagt—ausser Betracht), wobei nach (4) und (5)

$$A_q = E_0 \kappa^2 y^2 \frac{\partial u}{\partial y}. \quad (12)$$

In Dimensionslosen kommt dann

$$\frac{\partial T}{\partial v_* y/v} = \frac{1}{E_0} \frac{1}{\kappa} \frac{1}{Pr} \left(\frac{\partial T}{\partial v_* y/v} \right)_0 \frac{1}{v_* y/v}$$

mit der Prandtlzahl

$$Pr = \frac{c_p \mu}{\lambda}.$$

Integration ergibt für

$$T_* = (T_0 - T) c_p \frac{\rho v_*}{q_0} \quad (T_0 \text{ Wandtemperatur}) \quad (13)$$

das bekannte Wandgesetz

$$T_* = \frac{1}{E_0} \frac{1}{\kappa} \ln \frac{v_* y}{v} + D. \quad (14)$$

Für Strömungen in Luft ($Pr = 0,72$) hat sich der empirische Koeffizient E_0 aus Messungen zu etwa

$$E_0 \approx \frac{1}{0,89} \quad (15)$$

ergeben. Der turbulente Wärmeaustausch A_q ist also in der wandnahen Schicht mit

$$\frac{A_q}{A_t} \approx E_0 \quad (16)$$

grösser als der turbulente Impulsaustausch.

Allgemein ist eine Abhängigkeit des Koeffizienten E_0 von der Prandtlzahl Pr anzunehmen, wobei E_0 mit Pr fällt. Experimentell haben das T. Mizushima und T. Sasano [20] durch Messungen im Medium flüssiger Metalle nachgewiesen. Eine theoretische Bestimmung von E_0 ist zur Zeit noch nicht möglich.

Was die Integrationskonstante D betrifft, so hängt diese ebenfalls, wie sich aus Messungen

in der Unterschicht eine Modifikation der von van Driest [8] aufgestellten Hypothese (A 9) über den turbulenten Impulstransport in der Unterschicht zugrunde:

Für A_q erhalten wir dimensionsanalytisch zunächst

$$A_q = E_0 \chi^2 y^2 f_{*T}^2 \left(\frac{v_* y}{v} \right) \frac{\partial u}{\partial y}. \quad (17)$$

Das gibt für das Verhältnis der Austauschkoeffizienten

$$\frac{A_q}{A_t} = E_0 \frac{f_{*T}^2 (v_* y / v)}{f_*^2 (v_* y / v)}.$$

Zu fordern ist in Hinsicht auf (16)

$$\frac{A_q}{A_t} \rightarrow E_0 \quad \text{für} \quad \frac{v_* y}{v} \rightarrow \infty.$$

Weiter ist anzunehmen, dass

$$\frac{A_q}{A_t} \rightarrow 1 \quad \text{für} \quad \frac{v_* y}{v} \rightarrow 0.$$

Das führt auf die Formulierung

$$f_{*T} \left(\frac{v_* y}{v} \right) = 1 - \exp \left(- \frac{1}{\sqrt{E_0}} \frac{1}{a} \frac{v_* y}{v} \right). \quad (18)$$

Aus der Energiegleichung für die Unterschicht

$$\frac{\lambda}{\rho c_p} \left(\frac{\partial T}{\partial y} \right)_0 = \frac{\lambda}{\rho c_p} \frac{\partial T}{\partial y} + A_q \frac{\partial T}{\partial y} \quad (19)$$

folgt dann mit (A 10) die Temperaturverteilung in der Unterschicht

$$T_* = \int_0^{v_* y / v} \frac{Pr}{1 - \left(\frac{E_0 Pr}{2} \right) \left(\frac{f_{*T}}{f_*} \right)^2 \left\{ 1 - \left[\sqrt{1 + 4 \chi^2 \left(\frac{v_* y}{v} \right)^2 f_*^2} \right] \right\}} d \left(\frac{v_* y}{v} \right), \quad (20)$$

ergeben hat, von der Prandtlzahl Pr ab. Ihre theoretische Bestimmung scheint jedoch mittels einer Hypothese über den turbulenten Wärmetransport in der Unterschicht möglich.

Wir legen dem turbulenten Wärmetransport

die für $v_* y / v \rightarrow \infty$ in das Wandgesetz (14) übergeht. Für Luft mit $Pr = 0,72$ und $E_0 = 1/0,89$ ergibt die Rechnung in Übereinstimmung mit Messungen (vgl. z. B. [18])

$$D = 3,36. \quad (21)$$

Abbildung 12 enthält die durch (20) beschriebene Temperaturverteilung mit dem Wandgesetz (14).

(b) *Wabgesetz bei $\tau \approx \tau_0 + (dp/dx)y$.* Hier haben wir das Wandgesetz (A 11) der Geschwindigkeitsverteilung. Damit dann

$$\frac{\partial T}{\partial(v_*y/v)} = \frac{1}{E_0} \frac{1}{\kappa} \frac{1}{Pr} \left(\frac{\partial T}{\partial(v_*y/v)} \right)_0$$

$$\times \frac{\sqrt{[1 + F(v_*y/v)]}}{(v_*y/v)}. \quad (22) \quad D_{**} = \frac{1}{\sqrt{G}} D_*$$

$$T_{**} = (T_0 - T) \frac{c_p \rho}{q_0} \left(\frac{1}{\rho} \frac{dp}{dx} v \right)^{\frac{1}{2}} \quad (\equiv T_*/\sqrt{G})$$

die Darstellung

$$T_{**} = \frac{1}{E_0} \frac{1}{\kappa} \frac{1}{\sqrt{G}} \times \ln \left(\frac{4G^{\frac{1}{2}} \sqrt{(G + \eta_*)} - \sqrt{G}}{\sqrt{(G + \eta_*)} + \sqrt{G}} \right) + D_{**}, \quad (24)$$

wo

$$\eta_* = \frac{\sqrt{[1 + F(v_*y/v)]}}{(v_*y/v)}.$$

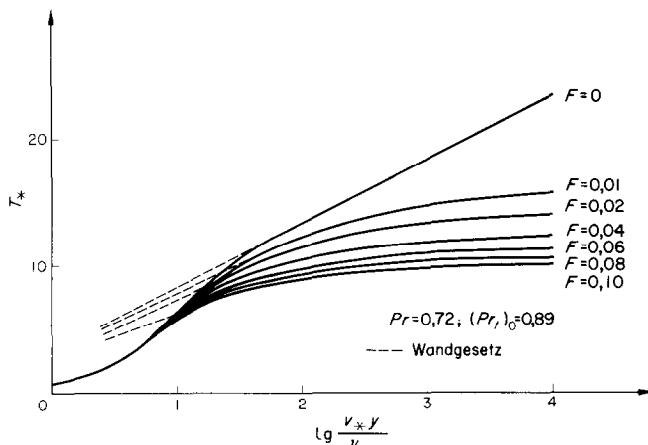


ABB. 12. Temperaturverteilung in der Unterschicht und wandnahen vollturbulenten Schicht bei Druckanstieg.

Integration ergibt das Wandgesetz der Temperaturverteilung bei Druckanstieg

$$T_* = \frac{1}{E_0} \frac{1}{\kappa} \ln \left(\frac{4 \sqrt{[1 + F(v_*y/v)]} - 1}{F \sqrt{[1 + F(v_*y/v)]} + 1} \right) + D_*, \quad (23)$$

das für $F \approx 0$ in (14) übergeht.

Für kleine v_* empfiehlt sich nach (A 14) in der Dimensionslosen

Solange der Druckgradient noch nicht wesentlich in das Kräftegleichgewicht der Unterschicht eingreift, wird man die Koeffizienten κ , D_* denen des logarithmischen Gesetzes (14) gleichsetzen können.

Beim Eingriff in die Unterschicht ist jedoch ein Abhängigkeit des Koeffizienten D_* vom Druckgradienten zu erwarten. Dimensionsanalytisch erhält man analog (17) zunächst

$$A_q = E_0 \kappa^2 y^2 f_{*T}^2 \left(\frac{\sqrt{(\tau/\rho)} y}{v} \right) \frac{\partial u}{\partial y} \quad \left. \right\} \quad (25)$$

mit

$$\tau = \tau_0 + \frac{dp}{dx} y.$$

Für die Geschwindigkeitsverteilung haben wir dabei (A 13) mit (A 12).

Entspr. (18) setzen wir

$$f_{*T} \left(\frac{\sqrt{(\tau/\rho)} y}{v} \right) = 1 - \exp \left\{ - \frac{1}{\sqrt{E_0} a} \frac{1}{v} v_* y \right. \\ \times \left. \sqrt{\left(1 + F \frac{v_* y}{v} \right)} \right\} \quad (26)$$

Aus der Energiegleichung (19) folgt dann die Verteilung

Tabelle 3	
F	D _*
0	3,36
0,01	3,00
0,02	2,78
0,04	2,51
0,06	2,35
0,08	2,25
0,10	2,17

die für $v_* y/v \rightarrow \infty$ in (23) übergeht und zur Ermittlung von D_* führt.

Einige nach (27) berechneten Temperaturverteilungen mit dem Wandgesetz (23) sind in Abb. 12 eingetragen; die zugehörigen Werte D_* in Tabelle 3.

Abbildung 13 enthält einen Vergleich mit

$$\int_0^{v_* y/v} \frac{Pr}{1 - \left(\frac{E_0 Pr}{2} \right) \left(\frac{f_{*T}}{f_T} \right)^2 \left\{ 1 - \sqrt{\left[1 + 4\kappa^2 \left(\frac{v_* y}{v} \right)^2 \left(1 + F \frac{v_* y}{v} \right) f_*^2 \right]} \right\}} d \left(\frac{v_* y}{v} \right), \quad (27)$$

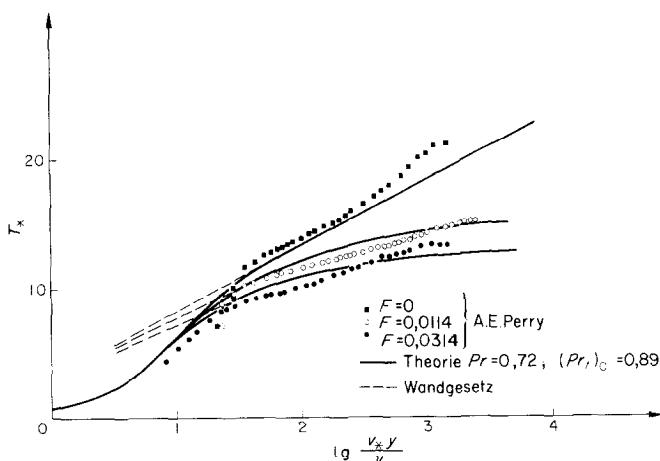


ABB. 13. Temperaturverteilung in der Unterschicht und wandnahen vollturbulenten Schicht bei Druckanstieg im Vergleich mit Messungen.

Messungen von A. E. Perry* [21]. Man kann feststellen, dass die durch den Druckgradienten bedingte beträchtliche Staffelung der Temperaturprofile durch die Theorie wiedergegeben wird. Dass gewisse Abweichungen auftreten, ist bei der Schwierigkeit der experimentellen Ermittlung (Bestimmung des Druckgradienten; Messung kleiner c_p -Werte und der Wärmestromdichte an der Wand) nicht auszuschliessen.

Bei der Wandschubspannung $\tau_0 = 0$ bzw. $G = 0$ ergibt die Umschreibung nach (24) und (A 14)

Grenzschichttheorie für inkompressible Strömung lautet bei vernachlässigbarer Dissipation

$$u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} = \frac{\lambda}{\rho c_p} \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial(A_q \partial T / \partial y)}{\partial y}. \quad (30)$$

Integrieren wir über y und beachten die Identität

$$\frac{d\delta}{dx} \equiv \left(\frac{u_1(x)}{u_0} \right)^{-1} Re_s \left(\frac{1}{Re_\delta} \frac{dRe_\delta}{dRe_x} - \frac{1}{u_1} \frac{du_1}{dRe_x} \right),$$

so erhalten wir mit

$$\chi = \frac{T - T_1}{T_0 - T_1} \quad \begin{array}{l} (T_1 \text{ Temperatur der äusseren} \\ \text{Potentialströmung}) \end{array}$$

$$T_{**} = \left. \int_0^{\eta_*} \frac{Pr}{1 - \left(\frac{E_0 Pr}{2} \right) \left(\frac{f_{*T}}{f_*} \right)^2 \left[1 - \sqrt{1 + 4\chi^2 \eta_*^3 f_*^2} \right]} d\eta_* \right\} \quad (28)$$

wo

$$f_* = 1 - \exp \left(-\frac{1}{a} \eta_*^{\frac{3}{2}} \right), \quad f_{*T} = 1 - \exp \left(-\frac{1}{\sqrt{E_0} a} \eta_*^{\frac{3}{2}} \right);$$

$$T_{**} \rightarrow -\frac{2}{\kappa} \frac{1}{E_0} \frac{1}{\sqrt{\eta_*}} + E_{**} \quad \text{für } \eta_* \rightarrow \infty.$$

Die numerische Integration ergab für Luft

$$E_{**} = 5,55 \quad (29)$$

und die in Abb. 14 angegebene Verteilung.

und

$$\eta = \frac{y}{\delta(x)}$$

in dimensionsloser Schreibweise die Gleichung

$$\left. \begin{aligned} \frac{1}{Pr} \frac{1}{Re_\delta} \frac{\partial \chi}{\partial \eta} + \frac{A_q}{u_1 \delta} \frac{\partial \chi}{\partial \eta} &= \frac{1}{Pr} \frac{1}{Re_\delta} \left(\frac{\partial \chi}{\partial \eta} \right)_0 \\ &+ \left(\frac{u_1(x)}{u_0} \right)^{-1} \left\{ \frac{\partial}{\partial Re_x} \left(Re_\delta \int_0^\eta \omega \chi d\eta \right) \right. \\ &\left. - \chi \frac{\partial}{\partial Re_x} \left(Re_\delta \int_0^\eta \omega d\eta \right) \right\} \\ &= \frac{1}{Pr} \frac{1}{Re_\delta} \left(\frac{\partial \chi}{\partial \eta} \right)_0 + \left(\frac{u_1(x)}{u_0} \right)^{-1} Z \end{aligned} \right\} \quad (31)$$

* Für die Mitteilung der Messdaten dankt der Verf. Herrn Prof. Perry.

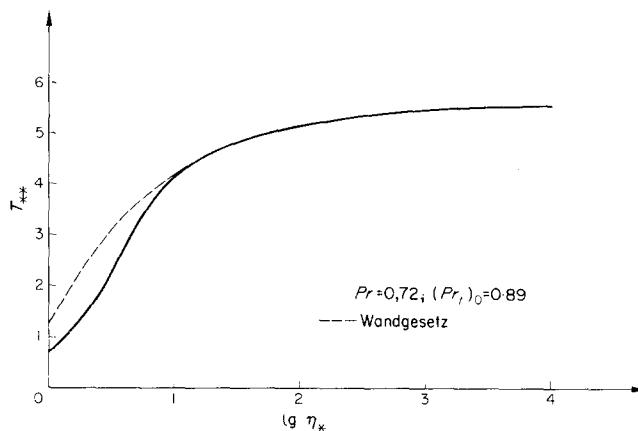


ABB. 14. Temperaturverteilung in der Unterschicht und wandnahen vollturbulenten Schicht bei der Wandschubspannung $\tau_0 = 0$.

Dabei ist nach (4) und (5) der turbulente Austauschkoeffizient der Wärme für die anisotrope Schicht

$$\frac{A_q}{u_1 \delta} = E_0 \chi^2 \eta^2 e^{-2\eta/\delta} \frac{\partial \omega}{\partial \eta}. \quad (32)$$

Für $\eta = \delta$ erhalten wir aus (31) und mit den Randbedingungen

$$\chi = 0, \quad \frac{\partial \chi}{\partial \eta} = 0 \quad \text{für } \eta = \delta \quad (33)$$

den Energieintegralsatz

$$\left. \begin{aligned} \frac{1}{Pr} \frac{1}{Re_\delta} \left(\frac{\partial \chi}{\partial \eta} \right)_0 &= - \left(\frac{u_1(x)}{u_0} \right)^{-1} \\ \times \frac{\partial}{\partial Re_x} \left(Re_\delta \int_0^\eta \omega \chi d\eta \right) \Big|_{\eta=\delta} & \\ \left[\equiv - \left(\frac{u_1(x)}{u_0} \right)^{-1} N \right]. \end{aligned} \right\} \quad (34)$$

Der Energiegleichung (31) können wir unter Vernachlässigung des molekularen Transports in der vollturbulenten Schicht auch die Form geben

$$\frac{A_q}{u_1 \delta} \frac{\partial \chi}{\partial \eta} = \frac{1}{Pr} \frac{1}{Re_\delta} \left(\frac{\partial \chi}{\partial \eta} \right)_0 \left\{ 1 - \frac{Z}{N} \right\}. \quad (35)$$

Analog dem Vorgehen bei der Berechnung der Strömungsgrenzschicht (A III) berechnen wir nun im weiteren vom Gesichtspunkt einer Korrektur zu den approximierenden Wandgesetzen die in (35) auftretenden Konvektionsglieder mittels der Wandgesetze.

Die auftretenden unbekannten Parameter q_0 und δ werden dann durch die Randbedingung $\chi = 0$ für $\eta = \delta$ und den Energieintegralsatz bestimmt.

(b) *Temperaturgrenzschichten bei Wandgesetz* $\tau \approx \tau_0$. In diesem Fall haben wir die logarithmischen Wandgesetze (A 8 bzw. A 20) der Geschwindigkeit und (14) der Temperatur. (A 20) liefert mit der Randbedingung $\omega = 1$ für $\eta = 1$ in erster Näherung die Relation (A 21)

$$Re_\delta = \frac{\xi}{\chi} e^{\xi - \chi c}. \quad (36)$$

Für ω_0 setzen wir entspr. und analog dem Vorgehen bei der Berechnung der Strömungsgrenzschicht (A 22)

$$\omega_0 = 1 + \frac{1}{\xi} \ln \eta. \quad (37)$$

(14) lautet in den Koordinaten η, χ

$$\left. \begin{aligned} \chi_0 &= M \ln \eta + 1 + M \left[\chi E_0 D \right. \\ &\quad \left. + \ln \left(Re_\delta \frac{\chi}{\xi} \right) \right], \\ M &= - \frac{\xi}{\chi^2} \frac{1}{E_0} St; \\ \text{wo} \\ St &= \frac{q_0}{\rho c_p (T_0 - T_1)} \frac{1}{u_1(x)} \end{aligned} \right\} \quad (38)$$

Stantonsche Zahl.

Die Randbedingung $\chi_0 = 0$ für $\eta = \Delta$ ergibt dann mit (36) in erster Näherung

$$M = \frac{-1}{\xi + \chi(E_0 D - C) + \ln \Delta}. \quad (39)$$

Für χ_0 setzen wir entspr. im weiteren

$$\chi_0 = M(\ln \eta - \ln \Delta). \quad (40)$$

Die Berechnung der Konvektionsglieder in (35) mit den Funktionen (37) und (40) ergibt dann bei Vernachlässigung von Gliedern kleinerer Größenordnung ($\xi \sim 10$) analog dem Vorgehen in (A IIIa)

$$\left. \begin{aligned} Z &\approx - \left[\frac{d(MRe_\delta)}{dRe_x} + MRe_\delta \frac{d\Delta/dRe_x}{\Delta} \right] \eta \\ &\quad + Re_\delta \frac{dM}{dRe_x} \eta(\ln \eta - \ln \Delta), \end{aligned} \right\} \quad (41)$$

$$N \approx - \left[\Delta = - \frac{u_1(x)}{u_0} \frac{\chi^2 E_0}{\xi} M \right] \quad (42)$$

nach dem Energieintegralsatz (34).

Dabei wurde Gebrauch gemacht von den Identitäten

$$\frac{1}{Pr} \frac{1}{Re_\delta} \left(\frac{\partial \chi}{\partial \eta} \right)_0 = - St = \frac{\chi^2 E_0}{\xi} M. \quad (43)$$

Es folgt mit (36)

$$\left. \begin{aligned} \frac{Z}{N} &\approx \frac{\eta}{\Delta} - \left(\frac{u_1(x)}{u_0} \right)^{-1} \frac{1}{\chi^3} \frac{1}{E_0} e^{-\chi C} \xi^2 e^\xi \\ &\quad \times \frac{dM/dRe_x}{M} \eta(\ln \eta - \ln \Delta). \end{aligned} \right\} \quad (44)$$

Hier wären nun M und Δ aus (39) und (42) zu ermitteln und im Rahmen unserer Näherungsrechnung in (44) einzusetzen.

Wir verfolgen den allgemeinen Fall jedoch nicht weiter und beschränken uns im weiteren auf die *Temperaturgrenzschicht an der ebenen Platte*.

Mit

$$\frac{d}{dRe_x} = \frac{d}{d\xi} \cdot \frac{d\xi}{dRe_x}$$

ergibt der Energieintegralsatz nach (42) hier zunächst

$$\frac{\chi^2 E_0}{\xi} \frac{1}{Re_\delta} \frac{1}{d\xi/dRe_x} = \Delta \frac{d(MRe_\delta)/d\xi}{MRe_\delta} + \frac{d\Delta}{d\xi}. \quad (45)$$

Für die ebene Platte hatte sich in erster Näherung nach (A 29) unter Vernachlässigung von Gliedern kleinerer Größenordnung ($\xi \gg 1$)

$$\frac{d\xi}{dRe_x} \approx \frac{\chi^3 e^{\chi C - \xi}}{\xi^2} \quad (46)$$

ergeben.

Weiter kommt mit (36) und (39)

$$\frac{d(MRe_\delta)/d\xi}{MRe_\delta} \approx 1, \quad Re_\delta \frac{d\xi}{dRe_x} \approx \frac{\chi^2}{\xi}. \quad (47)$$

Damit dann nach (45)

$$E_0 \approx \Delta + \frac{d\Delta}{d\xi}. \quad (48)$$

Nehmen wir (p. 688) bei der Konstellation (a) die Randbedingung $\Delta = 1$ für $\xi = 0$, so folgt aus (48)

$$\Delta = E_0 + (1 - E_0) e^{-\xi}.$$

Ist bei der Konstellation (b) der Temperatursprung an der Stelle $\xi = \xi_0$ gelegen, so erhalten wir mit $\Delta = 0$ für $\xi = \xi_0$

$$\Delta = E_0 (1 - e^{\xi_0 - \xi}).$$

In beiden Fällen haben wir für hinreichend grosse ξ , d.h. hinreichend grosse Lauflänge der Strömungsgrenzschicht (Fall a) bzw. der Temperaturgrenzschicht (Fall b),

$$\Delta = E_0 \quad \text{für grosse } \xi \quad (49)$$

in *erster Näherung*.

Für die Konvektionsglieder (44) erhalten wir mit (39) und (46)

$$\frac{Z}{N} \approx \frac{\eta}{\Delta} - \frac{1}{E_0} M \eta (\ln \eta - \ln \Delta) \approx \frac{\eta}{\Delta}. \quad (50)$$

Weiter haben wir hier für die Geschwindigkeitsverteilung nach (A 28)

$$\frac{\partial \omega}{\partial \eta} = \frac{1}{\xi} \frac{\sqrt{(1-\eta)}}{\eta} e^{\eta/m}. \quad (51)$$

Damit ergibt sich dann schliesslich nach (35) mit (32)

$$\chi = M \left\{ \int_0^{\eta} \frac{1}{\eta} \frac{1}{\sqrt{(1-\eta)}} \exp \left[\frac{\eta}{m} \left(\frac{2}{\Delta} - 1 \right) \right] \left(1 - \frac{\eta}{\Delta} \right) d\eta \right\} \quad (52)$$

für die Temperaturverteilung in der anisotropen Schicht. Spalten wir die Singularität ab, so kommt mit dem Wandgesetz (38)

$$\chi = \chi_0 + MG_1(\eta)$$

mit

$$G_1(\eta) = \left\{ \int_0^{\eta} \frac{1}{\eta} \left\{ \frac{\exp \{(\eta/m)[(2/\Delta) - 1]\}}{\sqrt{(1-\eta)}} \times \left(1 - \frac{\eta}{\Delta} \right) - 1 \right\} d\eta \right\} \quad (53)$$

für die anisotrope Schicht $0 \leq \eta \leq \eta_0$.

Falls $\Delta > 1$ ist, was für Luft mit (15) nach Formel (49) bei hinreichend grosser Lauflänge der Falls ist, so haben wir nach Abschn. I b an die anisotrope Schicht die isotrope Schicht zu schliessen. Dabei ist an der Anschluss-Stelle η_0 zu fordern

$$\left(\frac{q}{\rho c_p} \right)_{\text{isotrop}} = \left(\frac{q}{\rho c_p} \right)_{\text{anisotrop}}$$

bzw. nach (10) und (32) mit (51)

$$\frac{A_{\text{is}}}{u_1 \delta} e^{-\eta_0/m\Delta} = \frac{E_0 \chi^2}{\xi} \eta_0 \sqrt{(1 - \eta_0)}$$

$$\times \exp \left[\frac{\eta_0}{m} \left(1 - \frac{2}{\Delta} \right) \right],$$

woraus folgt

$$\frac{A_{\text{is}}}{u_1 \delta} = \frac{E_0 \chi^2}{\xi} \eta_0 \sqrt{(1 - \eta_0)}$$

$$\times \exp \left[\frac{\eta_0}{m} \left(1 - \frac{1}{\Delta} \right) \right]. \quad (54)$$

Die Anschluss-Stelle η_0 selbst ergibt sich dann aus der Bedingung, dass $\partial \chi / \partial \eta$ einen monotonen Verlauf zu nehmen hat. Diese Bedingung ist für (53) erfüllt, bis zu einem η_0 , das sich aus $\partial^2 \chi / \partial \eta^2 = 0$ ergibt.

Nach (3) ist $m = 0,6$ und für hinreichend grosse ξ nach (49) $\Delta = E_0 = 1/0,89$. Die Rechnung ergibt damit

$$\eta_0 \approx 0,866, \quad (55)$$

was in guter Übereinstimmung mit Messungen steht; vgl. Abb. 1. Für die isotrope Schicht haben wir dann nach (35) mit (10)

$$\frac{A_{\text{is}}}{u_1 \delta} e^{-\eta_0/m\Delta} \frac{\partial \chi}{\partial \eta} = \frac{M E_0 \chi^2}{\xi} \left\{ 1 - \frac{Z}{N} \right\} \quad (56)$$

bzw. mit (50), (54) und anschliessend an (53)

$$\chi = \chi_0 + M[G_1(\eta_0) + G_2(\eta)]$$

mit

$$G_2(\eta) = \frac{1}{\eta_0} \frac{1}{\sqrt{1 - \eta_0}} \exp \left[-\frac{\eta_0}{m} \left(1 - \frac{1}{A} \right) \right] \int_{\eta_0}^{\eta} e^{\eta/mA} \left(1 - \frac{\eta}{A} \right) d\eta - \ln \left(\frac{\eta}{\eta_0} \right) \quad (57)$$

für die isotropic Schicht $\eta_0 \leq \eta \leq A$.

Insgesamt haben wir also folgende Temperaturverteilung

$$\chi = \chi_0 + MG(\eta)$$

mit

$$G(\eta) = \begin{cases} G_1(\eta) & \text{nach (53) für } 0 \leq \eta \leq \eta_0 \\ G_2(\eta) + G_1(\eta_0) & \text{nach (57) für } \eta_0 \leq \eta \leq A \end{cases} \quad (58)$$

$G(\eta)$ stellt die Korrektur zum approximierenden Wandgesetz χ_0 dar. Für die Geschwindigkeitsverteilung ω hatten wir (A 25) erhalten, was in zweiter Näherung

$$Re_\delta = \frac{\xi}{\chi} e^{\xi - \kappa C - K(1)} \quad (59)$$

ergab [erste Näherung (36)].

χ hat der Randbedingung $\chi = 0$ für $\eta = A$ zu genügen. Das liefert mit (38) und (58) für M in zweiter Näherung unter Verwendung von (59)

$$M = \frac{-1}{\xi + \kappa(E_0D - C) - K(1) + G(A) + \ln A} \quad (60)$$

(erste Näherung (39)).

Für χ können wir dann auch setzen

$$\chi = M \{ \ln \eta - \ln A + G(\eta) - G(A) \} \quad (61)$$

mit M nach (60).

Es ergibt sich damit im Rahmen unserer Rechnung das interessante Ergebnis, dass für hinreichend grosse ξ mit konstantem $A \approx E_0$ die Temperaturverteilungen in der Grenzschicht

Tabelle 4

η	$G(\eta)$	η	$G(\eta)$
0,06	0,054	0,66	0,631
0,12	0,109	0,72	0,692
0,18	0,165	0,78	0,752
0,24	0,221	0,84	0,813
0,30	0,278	0,866	0,841
0,36	0,336	0,90	0,874
0,42	0,394	0,95	0,909
0,48	0,453	1,00	0,939
0,54	0,512	1,05	0,945
0,60	0,571	1,10	0,922
		1,089	0,910

an der ebenen Platte einander ähnlich sind. Nach der üblichen Terminologie befindet sich also die Temperaturgrenzschicht an der ebenen Platte im Äquilibrium.

Für die lokale Wärmestromdichte q_0 bzw. die lokale Stanton'sche Zahl ergibt sich mit $\kappa/\xi = \sqrt{(c_f/2)}$ (c_f lokale Widerstandsziffer) in erster Näherung aus (39)

$$St = \frac{c_f}{2} \frac{E_0}{1 + \sqrt{(c_f/2) 1/\kappa [\kappa(E_0D - C) - K(1) + G(A) + \ln A]}} \quad (62)$$

und in zweiter Näherung aus (60)

$$St = \frac{c_f}{2} \frac{E_0}{1 + \sqrt{(c_f/2) 1/\kappa [\kappa(E_0D - C) - K(1) + G(A) + \ln A]}} \quad (63)$$

Der numerischen Rechnung sind zugrunde zu legen nach (A 8): $\kappa = 0,41$; $C = 5 \cdot 10$. Für Luft nach (15) und (21): $E_0 = 1/0,89$, $D = 3,36$. Nach Tabelle 2: $K(1) = 1,026$.

Tabelle 4 enthält die nach (58) berechnete Funktion $G(\eta)$ für grosse ξ bzw. $\Delta = E_0$, wonach $G(\Delta) = 0,910$.

Damit dann

$$St = \frac{c_f}{2} \frac{1}{0,89} \frac{1}{1 - 1,325(1,042)\sqrt{(c_f/2)}} \quad (64)$$

(erste Näherung in Klammern).

Die theoretischen Ergebnisse haben wir mit einer Messung von A. E. Perry *et al.* [21] verglichen, der die Temperaturgrenzschicht an einer erhitzen Platte bei einer Temperaturdifferenz von etwa 20°C gegen die äussere Luftströmung und bei der Reynoldsschen Zahl

$$Re_x = 1,80 \cdot 10^6$$

gemessen hat.

Nach der theoretischen Formel (A 29) erhalten wir hier $c_f \cdot 10^3 \approx 3,16$ (3,00) und nach (64) $St \cdot 10^3 \approx 1,87$ (1,80); in Klammern die von Perry angegebenen Werte.

Abbildung 15 zeigt die theoretische und experimentelle Verteilung. Dabei kamen für die Umrechnung der theoretischen bzw. experimentellen Verteilung die Formeln

$$\frac{v_* y}{v} = \eta \sqrt{\left(\frac{c_f}{2}\right) Re_\delta} = \eta e^{\xi - \kappa C - K(1)}$$

$$T_* = (1 - \chi) \frac{\sqrt{(c_f/2)}}{St}$$

bzw.

$$\frac{v_* y}{v} = y \sqrt{\left(\frac{c_f}{2}\right) \frac{Re_x}{x}}$$

mit den theoretisch ermittelten c_f , St zur Anwendung.

(c) Temperaturgrenzschicht bei der Wandschubspannung $\tau_0 = 0$ (Stratfordsches Modell). Mit

$$\frac{u_1(x)}{u_0} = D_1 \left(\frac{x}{x_0} - D_2 \right)^n \quad (65)$$

(D_1, D_2 freie Konstanten)

haben wir hier für $Re_{x_0} \gg 1$ nach (A 37) das Wandgesetz

$$\omega_0 = 2(\sqrt{A_0}) \sqrt{\eta}.$$

Randbedingung und Impulsintegralsatz ergaben in erster Näherung (A 38 und A 42)

$$(\sqrt{A_0}) = \frac{1}{2} \quad \text{und} \quad \frac{u_1(x)}{u_0} = D_1 \left(\frac{x}{x_0} - D_2 \right)^{-0,25}. \quad (66)$$

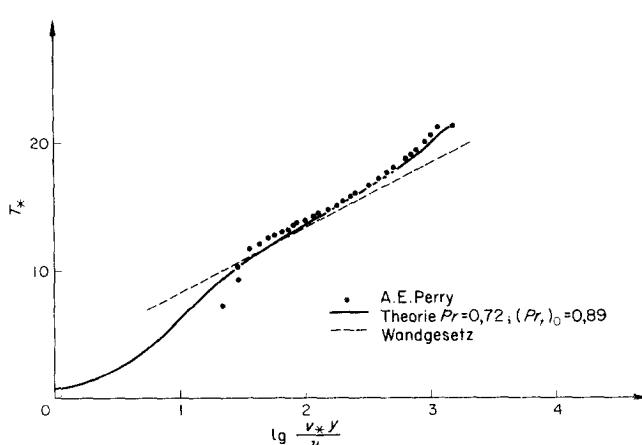


ABB. 15. Temperaturverteilung in der turbulenten Grenzschicht an der ebenen Platte.

Entspr. setzen wir im weiteren (A 38)

$$\omega_0 = \sqrt{\eta}. \quad (67)$$

Für die Grenzschichtdicke δ bzw. Re_δ folgt aus der Identität

$$Re_\delta \equiv -\kappa^2 A \frac{(u_1/u_0)^2}{d(u_1/u_0)/dRe_x} \quad (68)$$

mit (66)

$$Re_\delta = \kappa^2 Re_{x_0} D_1 \left(\frac{x}{x_0} - D_2 \right)^{0.75}. \quad (69)$$

Das Wandgesetz (28) der Temperatur nimmt in den Koordinaten η, χ unter Beachtung der Identität

$$\left(\frac{1}{\rho} \frac{dp}{dx} v \right)^{\frac{1}{2}} \equiv \left(\frac{\kappa^2 A}{Re_\delta} \right)^{\frac{1}{2}} u_1(x)$$

die Form an

$$\left. \begin{aligned} \chi_0 &= \frac{H}{\sqrt{\eta}} + [1 - \kappa^{-\frac{1}{2}} E_{**} (Re_\delta/A)^{\frac{1}{2}} St], \\ \text{wo} \quad H &= \frac{2}{\kappa^2} \frac{1}{E_0} \frac{1}{\sqrt{A}} St. \end{aligned} \right\} \quad (70)$$

Die Randbedingung $\chi_0 = 0$ für $\eta = A$ ergibt dann in erster Näherung mit (69)

$$\left. \begin{aligned} H &= \frac{2}{\kappa^2 E_{**} E_0 A_0^{\frac{1}{2}} Re_\delta^{\frac{1}{2}} - (2/\sqrt{A})} \\ &\approx \frac{2}{\kappa^2 E_{**} E_0 A_0^{\frac{1}{2}} Re_{x_0}^{\frac{1}{2}} D_1^{\frac{1}{2}} \left(\frac{x}{x_0} - D_2 \right)^{0.25}} \end{aligned} \right\} \quad (71)$$

bzw.

$$St \approx \frac{0.25^{\frac{1}{2}}}{E_{**}} \frac{1}{Re_{x_0}^{\frac{1}{2}}} \frac{1}{D_1^{\frac{1}{2}} \left(\frac{x}{x_0} - D_2 \right)^{0.25}}, \quad (72)$$

wobei nach (29)

$$\frac{0.25^{\frac{1}{2}}}{E_{**}} = 0.113.$$

Wir merken hier gleich an, dass die zweite Näherung, vgl. (90), nur eine geringfügige Änderung erbringt.

Das bemerkenswerte theoretische Ergebnis—das auf dem Wandgesetz (28) beruht—is die Abhängigkeit der Stanton'schen Zahl von der Reynoldsschen Zahl Re_{x_0} in der Potenz $-\frac{1}{3}$.

Dieses Ergebnis stimmt genau mit der von P. D. Richardson [22] aus der Analyse von Messungen gewonnenen Abhängigkeit überein. Die Messungen betrafen dabei den Wärmetransport in Luft am hinteren Staupunkt eines Kreiszylinders und an der Rückseite einer normal zur Strömung gestellten Platte.

Wir setzen entspr. (71) im weiteren

$$\chi_0 = H \left(\frac{1}{\sqrt{\eta}} - \frac{1}{\sqrt{A}} \right). \quad (73)$$

Die Berechnung der Konvektionsglieder in (35) mit den Funktionen (67) und (73) ergibt dann zunächst

$$\left. \begin{aligned} Z &= \frac{d(Re_\delta H)}{dRe_x} \left(\eta - \frac{2}{3} \frac{\eta^{\frac{1}{2}}}{\sqrt{A}} \right) \\ &\quad + \frac{1}{3} (Re_\delta H) \frac{\eta^{\frac{1}{2}}}{A^{\frac{1}{2}}} \frac{dA}{dRe_x} \\ &\quad - \frac{2}{3} H \frac{dRe_\delta}{dRe_x} \left(\eta - \frac{\eta^{\frac{1}{2}}}{\sqrt{A}} \right); \end{aligned} \right\} \quad (74)$$

$$N = \frac{d(Re_\delta H)}{dRe_x} \frac{A}{3} + \frac{1}{3} (Re_\delta H) \frac{dA}{dRe_x}.$$

Hier ist mit (69) und (71)

$$\left. \begin{aligned} Re_\delta H &\approx \frac{2}{E_{**} E_0 A_0^{\frac{1}{2}}} Re_{x_0}^{\frac{1}{2}} D_1^{\frac{1}{2}} \left(\frac{x}{x_0} - D_2 \right)^{0.5}, \\ \frac{d(Re_\delta H)}{dRe_x} &\approx \frac{1}{E_{**} E_0 A_0^{\frac{1}{2}}} \frac{D_1^{\frac{1}{2}}}{Re_0^{\frac{1}{2}}} \left(\frac{x}{x_0} - D_2 \right)^{-0.5}, \\ \frac{2}{3} H \frac{dRe_\delta}{dRe_x} &\approx \frac{1}{E_{**} E_0 A_0^{1/6}} \frac{D_1^{\frac{1}{2}}}{Re_0^{\frac{1}{2}}} \left(\frac{x}{x_0} - D_2 \right)^{-0.5}. \end{aligned} \right\} \quad (75)$$

$$\approx \frac{1}{E_{**} E_0 A_0^{1/6}} \frac{D_1^{\frac{1}{2}}}{Re_0^{\frac{1}{2}}} \left(\frac{x}{x_0} - D_2 \right)^{-0.5}.$$

Die in η linearen Glieder in Z heben sich also weg; und wir erhalten

$$\frac{Z}{N} \approx \frac{\eta^{\frac{3}{2}}}{\Delta^{\frac{3}{2}}}. \quad (76)$$

Der Energieintegralsatz (34)

$$St \frac{u_1(x)}{u_0} = N$$

ergibt dann mit (65), (72) und (74) mit (75) in erster Näherung die Gleichung

$$\begin{aligned} \frac{d\Delta}{dRe_x} + \frac{1}{2} \frac{1}{Re_{x_0}} \frac{1}{[(x/x_0) - D_2]} \Delta \\ = \frac{3}{4} E_0 \frac{1}{Re_{x_0}} \frac{1}{[(x/x_0) - D_2]}, \end{aligned} \quad (77)$$

aus der folgt

$$\Delta = \frac{3}{2} E_0 + \frac{\text{const.}}{\sqrt{[(x/x_0) - D_2]}}. \quad (78)$$

Es ergibt sich in der Grenze

$$\Delta \approx \frac{3}{2} E_0 \quad \text{für } \frac{x}{x_0} \gg 1.$$

Dieses Ergebnis erscheint unrealistisch. Es wird daher notwendig sein, zur Bestimmung von Δ die 2. Näherung heranzuziehen.

Mit (76) haben wir nach (35) die Energiegleichung

$$\frac{A_q}{u_1 \delta} \frac{\partial \chi}{\partial \eta} = - St \left(1 - \frac{\eta^{\frac{3}{2}}}{\Delta^{\frac{3}{2}}} \right). \quad (79)$$

Dabei ist für die anisotrope Schicht nach (32) und (A 40)

$$\begin{aligned} \frac{A_q}{u_1 \delta} &= \kappa^2 E_0 (\sqrt{\Delta}) \eta^{\frac{3}{2}} \sqrt{1 - \eta} \\ &\quad \exp \left[\frac{\eta}{m} \left(1 - \frac{2}{\Delta} \right) \right]. \end{aligned} \quad (80)$$

Es folgt

$$\chi = - \frac{H}{2} \int_0^{\eta} \frac{1}{\eta^{\frac{3}{2}}} \frac{\exp \left[\frac{\eta}{m} \left(\frac{2}{\Delta} - 1 \right) \right]}{\sqrt{1 - \eta}} \left(1 - \frac{\eta^{\frac{3}{2}}}{\Delta^{\frac{3}{2}}} \right) d\eta.$$

Spalten wir die Singularität ab, so kommt mit dem Wandgesetz (70)

$$\left. \begin{aligned} \chi &= \chi_0 - \frac{H}{2} G_1(\eta) \\ \text{mit} \quad G_1(\eta) &= \int_0^{\eta} \frac{1}{\eta^{\frac{3}{2}}} \left\{ \frac{\exp \left[\frac{\eta}{m} \left(\frac{2}{\Delta} - 1 \right) \right]}{\sqrt{1 - \eta}} \right. \\ &\quad \left. \left(1 - \frac{\eta^{\frac{3}{2}}}{\Delta^{\frac{3}{2}}} \right) - 1 \right\} d\eta \end{aligned} \right\} \quad (81)$$

für die anisotrope Schicht $0 \leq \eta \leq \eta_0$.

Nehmen wir im weiteren an, dass $\Delta > 1$, so haben wir an die anisotrope Schicht die isotrope Schicht zu schliessen. Die Anschlussstelle η_0 wird wieder aus der Bedingung eines monotonen Verlaufs von $\partial \chi / \partial \eta$ ermittelt.

$\partial^2 \chi / \partial \eta^2 = 0$ ergibt für (81) mit $m = 0,6$, $E_0 = 1/0,89$ und $\Delta = 1,1$

$$\eta_0 \approx 0,90. \quad (82)$$

Dieser Wert liegt erwartungsgemäß etwas höher als bei der ebenen Platte ($\eta_0 = 0,87$).

Für die isotrope Schicht kommt aus

$$\left(\frac{q}{\rho c_p} \right)_{\text{isotrop}} = \left(\frac{q}{\rho c_p} \right)_{\text{anisotrop}} \quad \text{bei } \eta_0$$

nach (10) und (80)

$$\begin{aligned} \frac{A_{is}}{u_1 \delta} &= \kappa^2 E_0 (\sqrt{\Delta}) \eta_0^{\frac{3}{2}} \sqrt{1 - \eta_0} \\ &\quad \times \exp \left[\frac{\eta_0}{m} \left(1 - \frac{1}{\Delta} \right) \right]. \end{aligned} \quad (83)$$

Damit dann nach (10) und (35)

$$\frac{A_{is}}{u_1 \delta} e^{-\eta/m\Delta} \frac{\partial \chi}{\partial \eta} = - St \left(1 - \frac{\eta^{\frac{3}{2}}}{\Delta^{\frac{3}{2}}} \right). \quad (84)$$

Es folgt

$$\left. \begin{aligned} \chi &= \chi_0 - \frac{H}{2} (G_1(\eta_0) + G_2(\eta)) \\ \text{mit} \\ G_2(\eta) &= \frac{1}{\eta_0^{\frac{3}{2}}} \frac{1}{\sqrt{(1-\eta_0)}} \exp \left[-\frac{\eta_0}{m} \left(1 - \frac{1}{A} \right) \right] \\ &\int_{\eta_0}^{\eta} e^{\eta/mA} \left(1 - \frac{\eta^{\frac{3}{2}}}{A^{\frac{3}{2}}} \right) d\eta + 2 \left(\frac{1}{\sqrt{\eta_0}} - \frac{1}{\sqrt{\eta}} \right) \end{aligned} \right\} \quad (85)$$

für die isotrope Schicht $\eta_0 \leq \eta \leq A$.

Insgesamt haben wir also die folgende Temperaturverteilung

$$\left. \begin{aligned} \chi &= \chi_0 - \frac{H}{2} G(\eta) \\ \text{mit} \\ G(\eta) &= \begin{cases} G_1(\eta) & \text{nach (81)} \\ & \text{für } 0 \leq \eta \leq \eta_0 \\ G_1(\eta_0) + G_2(\eta) & \text{nach (85)} \\ & \text{für } \eta_0 \leq \eta \leq A. \end{cases} \end{aligned} \right\} \quad (86)$$

Die Randbedingung $\chi = 0$ für $\eta = A$ ergibt nunmehr in zweiter Näherung mit (70)

$$H = \frac{2}{\chi^{\frac{4}{3}} E_{**} E_0 A^{\frac{1}{3}} Re_{\delta}^{\frac{1}{3}} - (2/\sqrt{A}) + G(A)} \quad (87)$$

(erste Näherung (71)).

Für die Strömungsgrenzschicht hatten wir in zweiter Näherung erhalten (A 42)

$$\frac{u_1(x)}{u_0} = D_1 \left(\frac{x}{x_0} - D_2 \right)^{-0,235},$$

was mit (68)

$$Re_{\delta} = \frac{\chi^2 A}{0,235} Re_{x_0} D_1 \left(\frac{x}{x_0} - D_2 \right)^{0,765} \quad (88)$$

ergibt.

Damit dann

$$\left. \begin{aligned} H &\approx \frac{2}{\chi^2 E_0} \frac{1}{\sqrt{A}} \frac{0,235^{\frac{1}{3}}}{E_{**}} \frac{1}{Re_{x_0}^{\frac{1}{3}}} \\ &\quad \frac{1}{D_1^{\frac{1}{3}} [(x/x_0) - D_2]^{0,255}}; \end{aligned} \right\} \quad (89)$$

wobei nach (A 18) $\chi = 0,41$, nach (A 41) $(\sqrt{A}) = 0,38$; für Luft nach (15) $E_0 = 1/0,89$ und nach (29) $E_{**} = 5,55$ bzw.

$$\left. \begin{aligned} St &\approx \frac{0,235^{\frac{1}{3}}}{E_{**}} \frac{1}{Re_{x_0}^{\frac{1}{3}}} \\ &\quad \times \frac{1}{D_1^{\frac{1}{3}} [(x/x_0) - D_2]^{0,255}}. \end{aligned} \right\} \quad (90)$$

Wir erhalten also wie in (72) eine Abhängigkeit der Stanton'schen Zahl von der Reynoldsschen Zahl Re_{x_0} in der Potenz $-\frac{1}{3}$. Fortschreitend nimmt dann die Stanton'sche Zahl mit wachsender Dicke der anliegenden Grenzschicht proportional der Aussengeschwindigkeit $u_1(x)/u_0$ ab.

Für das Stratfordsche Modell haben wir nach Messung (A 43)

$$D_1 \approx (\sqrt{0,37}); \quad D_2 \approx 0,84.$$

Damit

$$St \approx 0,131 \frac{1}{Re_{x_0}^{\frac{1}{3}}} \frac{1}{[(x/x_0) - D_2]^{0,255}} \quad (91)$$

für Stratfords Modell.

Entspr. (87) können wir auch setzen

$$\chi = H \left\{ \frac{1}{\sqrt{\eta}} - \frac{1}{\sqrt{A}} - \frac{1}{2} (G(\eta) - G(A)) \right\} \quad (92)$$

mit H nach (89).

Abbildung 16 zeigt die Temperaturverteilung $1 - \chi$ bei $x/x_0 = 1$ und $A = 1,1$ im Vergleich zur Geschwindigkeitsverteilung des Stratfordschen Modells.

Wir sind nunmehr in der Lage, A in 2. Näherung zu bestimmen. Mit ω , $u_1(x)/u_0$ und

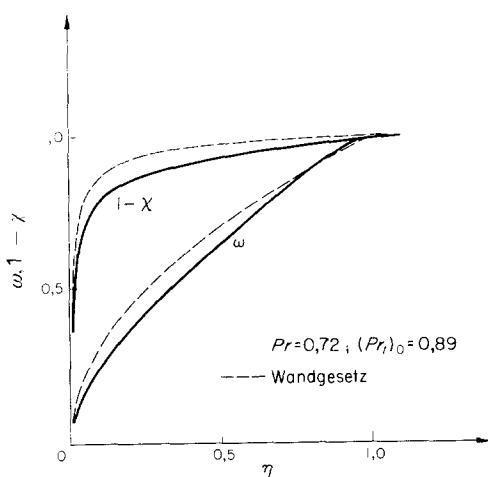


ABB. 16. Geschwindigkeitsverteilung für Stratfords Modell und Temperaturverteilung bei $x/x_0 = 1,0$ und $\Delta = 1,1$.

Re_δ nach (A 40–42) und (88); χ , St nach (92), (91) ergibt der Energieintegralsatz (34)

$$St \frac{u_1(x)}{u_0} = \frac{d}{d Re_x} \left(Re_\delta \int_0^4 \omega \chi d\eta \right)$$

für den Grenzwert Δ mit $d\Delta/dRe_x = 0$ die Gleichung

$$\frac{0,235}{1,02} \cdot \frac{E_0}{0,38} = 2(\sqrt{\Delta}) - 1,091 - \frac{1}{2} \int_0^4 \omega G d\eta + (\Delta - 0,375) \left(\frac{G(\Delta)}{2} - \frac{1}{\sqrt{\Delta}} \right)$$

Mittels einer Interpolationsformel für $G(\Delta)$ und $\int_0^4 \omega G d\eta$ in Abhängigkeit von Δ folgt dann mit $E_0 = 1/0,89$ der Grenzwert $\Delta \approx 1,085$.

LITERATUR

1. W. SZABLEWSKI, Turbulente Grenzschichten mit Druckabfall, *Ing. Arch.* **37**, 267–280 (1968).
2. W. SZABLEWSKI, Turbulente Grenzschichten in Ablösungsnahe, *ZAMM* **49**, 215–225 (1969).
3. W. SZABLEWSKI, Turbulente Grenzschichten mit Druckanstieg, *ZAMM* **51**, 283–294 (1971).
4. P. S. KLEBANOFF, Characteristics of turbulence in a boundary layer with zero pressure gradient, *NACA Rep.* 1247, 1135–1153 (1955).
5. Y. A. BUYEVICH, Bemerkung über die Konstruktion von Modellen für wandnahe Turbulenz, *ZAMM* **49**, 372–374 (1969).
6. I. O. HINZE, *Turbulence*. McGraw-Hill, New York (1959).
7. W. SZABLEWSKI, Turbulente Parallelströmungen, *ZAMM* **48**, 35–50 (1968).
8. E. R. VAN DRIEST, On turbulent flow near a wall, *J. Aeronaut. Sci.* **23**, 1007–1011 (1956).
9. W. SZABLEWSKI, Turbulente Strömungen in divergenten Kanälen, *Ing. Arch.* **22**, 268–281 (1954).
10. A. A. TOWNSEND, Equilibrium layers and wall turbulence, *J. Fluid Mech.* **11**, 97–120 (1961).
11. G. L. MELLOR, The effects of pressure gradients on turbulent flow near a smooth wall, *J. Fluid Mech.* **24**, 255–274 (1966).
12. W. SZABLEWSKI, Analyse von Messungen turbulenten Grenzschichten mittels der Wandgesetze, *Ing. Arch.* **29**, 291–300 (1960).
13. H. I. HERRING and J. F. NORBURY, Some experiments on equilibrium turbulent boundary layers in favourable pressure gradient, *J. Fluid Mech.* **27**, 541–549 (1967).
14. D. B. SPALDING and S. W. CHI, The drag of compressible turbulent boundary layer on a smooth flat plate with and without heat transfer, *J. Fluid Mech.* **18**, 117–143 (1964).
15. F. H. CLAUSER, Turbulent boundary layers in adverse pressure gradients, *J. Aeronaut. Sci.* **21**, 91–108 (1954).
16. B. S. STRATFORD, An experiment flow with zero skin friction throughout its region of pressure rise, *J. Fluid Mech.* **5**, 17–34 (1959).
17. D. S. JOHNSON, Turbulent heat transfer in a boundary layer with discontinuous wall temperature, *OSR T.N.* 55–289 (1955).
18. R. E. JOHNK and T. S. HANRATTY, Temperature profiles for turbulent flow of air in pipe—I, *Chem. Engng Sci.* **17**, 867–879 (1962).
19. R. L. SIMPSON, D. G. WHITTEN and R. J. MOFFAT, An experimental study of the turbulent Prandtl number of air with injection and suction, *Int. J. Heat Mass Transfer* **13**, 125–143 (1970).
20. T. MIZUSHINA and T. SASSANO, The ratio of the eddy diffusivities for heat and momentum and its effect on liquid metal heat-transfer coefficients, *Int. Dev. Heat Transfer, ASME*, 662 (1961).
21. A. E. PERRY, I. B. BELL and P. N. JOUBERT, Velocity and temperature profiles in adverse pressure gradient turbulent boundary layers, *J. Fluid Mech.* **25**, 299–320 (1966).
22. P. D. RICHARDSON, Heat and mass transfer in turbulent separated flows, *Chem. Engng Sci.* **18**, 149–155 (1963).

ANHANG

Zur Hypothese über die turbulente Schubspannung
(1) *Wandnahe vollturbulente Schicht* ($y \ll \delta$)

Nach (A 2) haben wir hier die charakteristische Länge $l = \kappa y$ (κ empirischer Koeffizient)

$$\text{bzw. } \frac{dl}{l} = \frac{dy}{y}.$$

(2) *Gesamte vollturbulente Schicht*

(a) Neben dem Wandabstand y tritt als weitere determinierende Länge die Grenzschichtdicke δ auf. Damit dann

$$\frac{dl}{l} = \frac{dy}{y} \varphi(\eta), \quad \eta = \frac{y}{\delta} \quad (1)$$

mit der bei der Dimensionanalyse unbestimmt bleibenden Funktion

$$\varphi(\eta).$$

Als Randbedingungen haben wir

$$\begin{aligned} l &= xy & \text{für } \eta \rightarrow 0 & \text{bzw. } \varphi(0) = 1; \\ l &\rightarrow 0 & \text{für } \eta \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

Entwickeln wir $\varphi(\eta)$ in eine Taylor-Reihe und beschränken uns auf das lineare Glied

$$\varphi(\eta) = 1 - \frac{\eta}{m} \quad (2)$$

(m empirischer Koeffizient),

so kommt

$$\frac{dl}{l} = \frac{dy}{y} \left(1 - \frac{\eta}{m} \right)$$

bzw. $l = xy e^{-\eta/m}$; vgl. (A 3).

(b) Führen wir den Gradienten

$$L = \frac{l}{xy} = \frac{l/\delta}{\eta}$$

ein und beachten, dass

$$\frac{dl/\delta}{d\eta} = x\eta \frac{dL}{dy} + xL;$$

so erhalten wir die (1) entspr. Gleichung

$$\frac{dL/d\eta}{L} = \frac{\varphi(\eta) - 1}{\eta}$$

mit den Randbedingungen

$$\begin{aligned} L &\rightarrow 1 & \text{für } \eta \rightarrow 0 \\ L &\rightarrow 0 & \text{für } \eta \rightarrow \infty. \end{aligned} \quad (3)$$

Mit (2) dann

$$\frac{dL/d\eta}{L} = -\frac{1}{m}. \quad (4)$$

(3) *Unterschicht*

Anstelle δ tritt hier als weitere determinierende Länge v/v_* auf.

Der Gradient

$$L = \frac{l}{xy} = \frac{l_*}{x y_*}$$

mit

$$l_* = \frac{v_* l}{v}, \quad y_* = \frac{v_* y}{v}$$

hat den zu (3) inversen Randbedingungen $L \rightarrow 0$ für $y_* \rightarrow 0$, $L \rightarrow 1$ für $y_* \rightarrow \infty$ zu genügen; jedoch treten für

$$L_* = 1 - L$$

die zu (3) analogen Randbedingungen

$$\begin{aligned} L_* &\rightarrow 1 & \text{für } y_* \rightarrow 0 \\ L_* &\rightarrow 0 & \text{für } y_* \rightarrow \infty \end{aligned} \quad (5)$$

auf.

Mit der zu (4) analogen Gleichung

$$\frac{dL_*/dy_*}{L_*} = -\frac{1}{a}$$

(a empirischer Koeffizient)

erhält man dann unter Beachtung der Randbedingungen (5)

$$l = xy \left[1 - \exp \left(-\frac{1}{a} \frac{v_* y}{v} \right) \right]$$

also den Ansatz von van Driest; vgl. (A 9).

INCOMPRESSIBLE TURBULENT TEMPERATURE-BOUNDARY LAYERS WITH CONSTANT WALL-TEMPERATURE

Abstract—On a phenomenologic basis using dimensional analysis a simple hypothesis is given for turbulent momentum transfer. The calculations—in principle iteration procedures—are based on the determination of corrections to the wall laws known for giving approximations. For equilibrium—boundary-layers the calculation is reduced to quadrature yielding simple solutions. The turbulent boundary-layer along a flat plate and the Stratford model of a turbulent boundary layer with zero wall shear stress are considered. Agreement is found to experimental data.

For the turbulent temperature boundary layer the experimental observation is used that a layer of inhomogeneous anisotropic turbulence is located next to a layer of homogeneous isotropic turbulence within a hydrodynamic boundary layer. The hypothesis for the turbulent momentum transfer is consequently applied to the turbulent heat transfer in the isotropic layer. The turbulent heat transfer in the isotropic layer is obtained quantitatively with the anisotropic layer.

Satisfactory agreement is obtained between the theoretical turbulent heat transfer, or the turbulent Prandtl-number with measurements for fully developed tube flow or along a flat plate. Again the calculation is based on the determination of corrections to the approximated wall-laws of temperature distribution; the wall-law for pressure increase formulated here is verified by measurements.

The temperature boundary layer along the flat plate and the temperature boundary layer for zero wall shear stress is predicted in closed form.

A $-1/3$ power Reynolds-number dependence to Stanton-number is found in this latter case.

The theory contains only four constants considered as universal: two coefficients in the equation for turbulent momentum exchange in the sublayer; the relative width of the inner, wall-influenced layer of the velocity field; the turbulent Prandtl-number for air-flows, in near wall fully turbulent layers.

COUCHES LIMITES TURBULENTES INCOMPRESSIBLES AVEC TEMPÉRATURE PARIÉTALE CONSTANTE

Résumé—A—Sur une base phénoménologique utilisant l'analyse dimensionnelle, on donne une hypothèse simple sur le transfert de quantité de mouvement par turbulence. Les calculs—en principe des procédures itératives—sont basés sur la détermination des corrections des lois pariétales connues pour des approximations données. Pour des couches limites en équilibre le calcul est réduit à une intégration conduisant à des solutions simples. On considère la couche limite turbulente le long d'une plaque plane et le modèle de Stratford de couche limite turbulente avec une contrainte tangentielle nulle à la paroi. On observe un accord avec les résultats expérimentaux.

B—Pour la couche limite thermique turbulente, on utilise l'observation expérimentale selon laquelle une couche de turbulence anisotrope et non homogène est située près d'une couche de turbulence isotrope homogène au sein d'une couche limite hydrodynamique. On applique l'hypothèse de transfert turbulent de quantité de mouvement au transfert turbulent de chaleur dans la couche isotrope. On évalue le transfert thermique turbulent dans la couche isotrope et dans la couche anisotrope.

On obtient un accord satisfaisant entre l'expérience et le calcul du transfert thermique turbulent et du nombre de turbulence de Prandtl pour un écoulement entièrement développé dans un tube ou le long d'une plaque plane. Le calcul est basé sur la détermination des corrections des lois pariétales approchées de distribution de température; la loi de paroi pour l'accroissement de pression formulée ici est vérifiée par les mesures.

La couche limite de température le long de la plaque plane et celle pour une contrainte pariétale tangentielle nulle sont données analytiquement. On trouve dans le dernier cas que le nombre de Stanton dépend du nombre de Reynolds suivant la puissance—1/3.

La théorie contient seulement quatre constantes universelles: deux coefficients dans l'équation de l'échange turbulent de quantité de mouvement dans la sous-couche; la largeur relative de la couche interne dynamique influencée par la paroi; le nombre de Prandtl turbulent pour des écoulements d'air dans des couches entièrement turbulentes près de la paroi.

НЕСЖИМАЕМЫЙ ТУРБУЛЕНТНЫЙ ТЕПЛОВОЙ ПОГРАНИЧНЫЙ СЛОЙ ПРИ ПОСТОЯННОЙ ТЕМПЕРАТУРЕ СТЕНКИ

Аннотация—На феноменологической основе с помощью анализа размерностей формулируется простая гипотеза о турбулентном переносе импульса. Использованный метод расчета распределения скоростей, представляющий собой метод итерации, состоит в определении поправок к аппроксимированным законам стенки. Для равновесных слоев расчет, сводящийся к квадратурам, дает простые решения в замкнутом виде. Описывается турбулентный пограничный слой на пластине и модель Стратфорда для турбулентного слоя при трении на стенке, стремящимся к нулю. Результаты расчетов согласуются с экспериментальными данными.

В случае теплового пограничного слоя принимается, что на течение в подслое однородной изотропной турбулентности накладывается слой неоднородной анизотропной турбулентности. Гипотеза о турбулентном переносе импульса используется для переноса тепла в неизотропном подслое. Тогда перенос тепла в изотропном подслое определяется количественно совместно с анизотропным подслоем. Теоретическое распределение

коэффициента турбулентного числа Прандтля удовлетворительно согласуется с экспериментальными данными, полученными при измерении полностью развитого течения в трубе или на плоской пластине. Используемый метод состоит в определении поправок приближенных законов распределения температур у стенки для положительного градиента давления и подтверждается экспериментом.

В замкнутом виде описывается температурный пограничный слой при исчезающем малом трении на стенке. В последнем случае получается степенной закон зависимости числа Стантона от числа Рейнольдса со степенью $-1/3$. Предложенная теория использует четыре величины, которые рассматриваются как универсальные постоянные: два коэффициента в выражении для турбулентного переноса импульса в подслое; относительная толщина внутреннего слоя поля скоростей, на который оказывает влияние стенка; турбулентное число Прандтля в полностью развитом турбулентном слое вблизи стенки (для потоков воздуха).